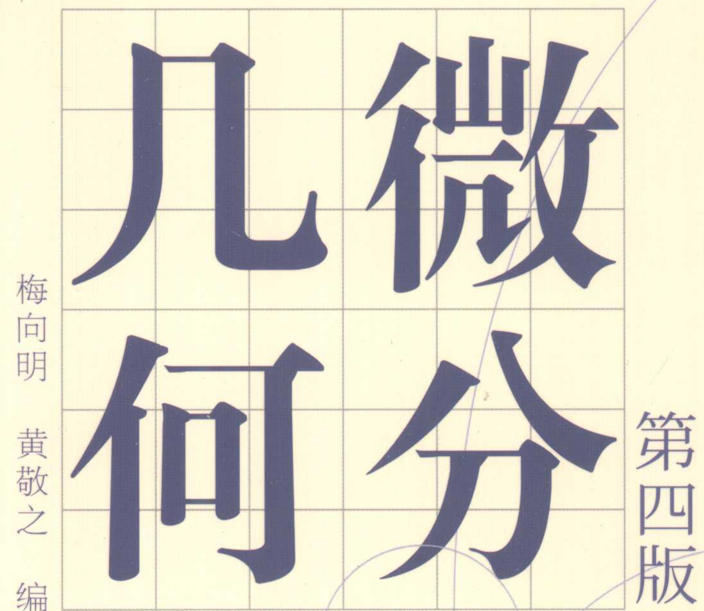


普通高等教育"十一五"国家级规划教材



微分几何

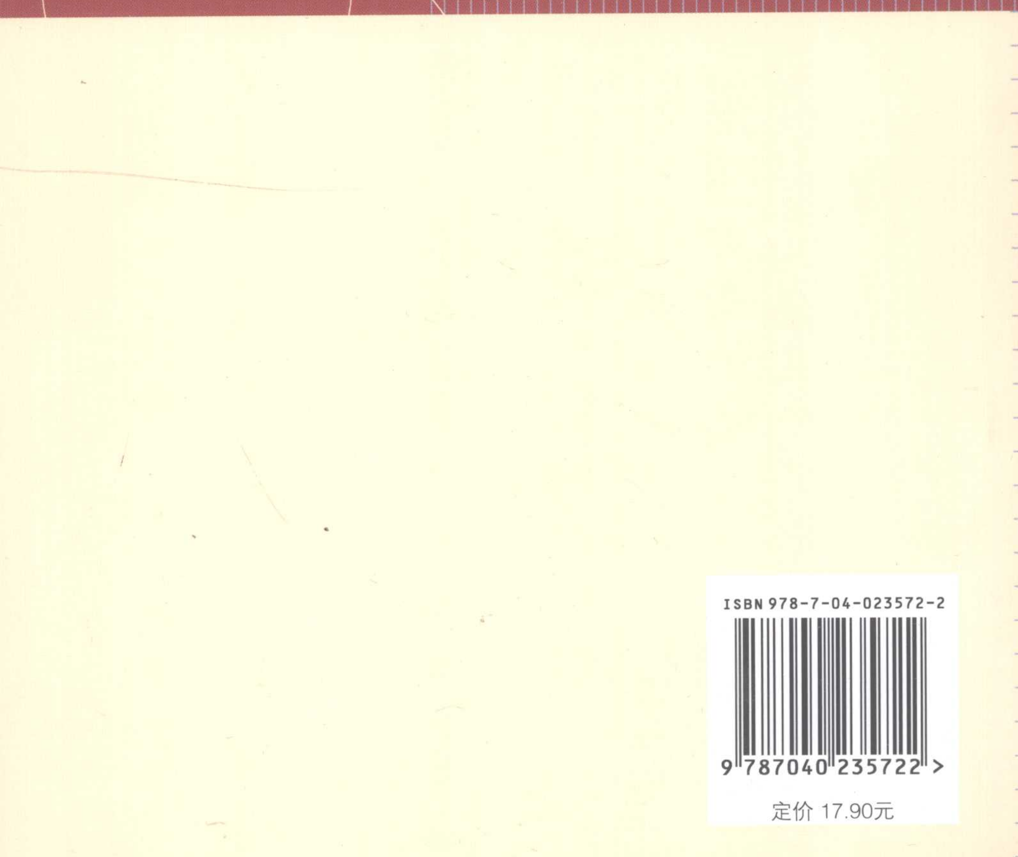
第四版

梅向明 黄敬之 编

微分几何的主要内容是三维欧氏空间的曲线论和曲面论。欧拉是微分几何的重要奠基人，他早在1736年就引进了平面曲线的内蕴坐标概念，即以曲线弧长作为曲线上点的坐标，从而开始了曲线的内蕴几何的研究；曲面论的奠基人是19世纪的高斯……



高等教育出版社



ISBN 978-7-04-023572-2

9 787040 235722 >

定价 17.90元

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

微分几何

第四版

梅向明　黄敬之　编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，在第三版的基础上修订而成。这次再版主要是增加了比较微分几何的内容，使读者进一步学习近代比较黎曼几何时，有较好的分析准备和直观的几何背景；同时在第四章§3中增加了“负常高斯曲率的曲面”的内容，删除了§4“紧致曲面的高斯-波涅公式和欧拉示性数”一节。

本书可供高等师范院校数学系用作教材。

图书在版编目(CIP)数据

微分几何/梅向明，黄敬之编. —4版. —北京：高等教育出版社，2008.5

ISBN 978-7-04-023572-2

Ⅰ.微… Ⅱ.①梅…②黄… Ⅲ.微分几何-师范大学-教材 Ⅳ.O186.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第036104号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	北京凌奇印刷有限责任公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	1981年7月第1版
开　　本	850×1168 1/32		2008年5月第4版
印　　张	11.375	**印　　次**	2008年5月第1次印刷
字　　数	290 000	**定　　价**	17.90元

物料号　23572-00

第四版前言

尽管本教材的第三版出版至今还不到五年，我们又决定再次重新修订，目的是希望能够使其内容不断更新，跟上“微分几何”发展的潮流。在这一版中，我们主要增加了比较微分几何的内容，也就是第四章的最后一节：完备曲面上的比较定理，其中叙述了“比较定理”和“完备曲面上的 Toponogov 定理”。这将使读者进一步学习近代比较黎曼几何时，有较好的分析准备和直观的几何背景。可是为了不使本教材的分量过重，我们不得不删去一些内容。我们删去了“紧致曲面的高斯-波涅公式和欧拉示性数”，这个内容当然很重要，不过问题不大，因为在本书的第三章中已经讲述了“曲面上的高斯-波涅公式”。此外，在本书的第四章§3“曲面的整体性质”中，我们已经介绍了正高斯曲率的曲面（即卵形面），为了完整起见，我们增加了负高斯曲率曲面的内容，特别是负常高斯曲率的曲面以及相关的 Bäcklund 变换的内容。

梅向明

2007年1月于首都师范大学

第三版序言

这本《微分几何》教材自从1981年出版、1988年再版以来，一直被许多高等学校的数学专业采用，看来它的内容基本上能够符合时代发展的要求。1999年，这本教材的第二版还获得了北京市科技进步奖的二等奖。这一次再版，砍掉了一些内容，主要是原教材的第一章中的向量代数部分和第二章中的平面曲线部分，因为这些内容可以在解析几何和微积分的教材中找到。砍掉这些内容的原意是，在整体微分几何部分增添一些近代微分几何的内容。但是由于这本书是大学本科的专业课教材，并不是给研究生用的教材，不能添加过深的内容，最后决定只是在第四章增加了一节：完备曲面，其目的是使读者阅读了这些内容以后思维领域能够从**紧致**扩充到**完备**，这也是目前近代微分几何研究的重点之一。对于这个问题，在这本教材中开了一个头，使读者学习了近代微分几何这些内容以后在脑子里经常思索这样一个问题：如何把微分几何中对**紧致**情形成立的一些成果推广到**完备**的情形。

在这一版的最后，添加了名词索引。名词后的数码表示第几章第几节。

梅向明　黄敬之

2003年1月于首都师范大学

第二版序言

在这一版中，我们增加了第四章：整体微分几何初步。原来我校所用的“微分几何”讲义中曾包括这部分内容，后来根据高等师范学校“微分几何”教学大纲的要求，删掉了这一章。但是根据许多兄弟院校使用这本教材的教师和学生所提出的要求，我们又重新把这一章列入，作为微分几何选修课或进一步自学的内容。我们曾在选修课中多次讲授了这一章。本版中这一章的内容是根据北京师范学院数学系的王汇淳同志试用的情况以及其他兄弟院校的同志试用后所提出的意见多次修改而成的。

教材第一版的原来部分没有改动，只是作了一些文字上的修改，并根据读者的要求，在前三章中增加了一些习题。

本书的责任编辑张爱和同志提出了不少好的修改意见，我们谨在此表示衷心的感谢。

梅向明　黄敬之

1986 年 8 月于北京师范学院数学系

第一版前言

这本教材是我们多年来讲授微分几何课所用的讲义，根据高等师范院校微分几何教学大纲的要求，整理修改而成。其中第一、二章曾在1966年前反复讲授多遍，第三章只在近年来才讲过。

微分几何是一门历史悠久的学科。可以这样说，微积分诞生时就同时诞生了微分几何，不过这门学科的生命力至今还很旺盛。近年来它对数学中其他分支的影响越来越深刻，对于自然科学中其他学科的影响的范围也越来越扩大。与此同时，这门学科本身从内容上到方法上也在不断更新。作为一本教科书应该尽可能地反映这样一种发展趋势。但是由于高等师范院校数学专业教学计划中所给予微分几何这门课的课时的限制，不可能完全满足这样的要求。我们的想法是，从内容上来说还是讲授微分几何中最基础的部分——三维欧氏空间中的曲线和曲面的局部理论，可是从方法上来说则加以更新。这样做将使学生能够从较浅显的内容去学习近代的处理方法，对新方法接受起来阻力比较小一些；另一方面，对于微分几何有兴趣的学生，在掌握了新方法以后，就可以通过选修课或讨论班进一步运用这些方法去学习微分几何的近代内容。

在这本教材里作为新的方法来说，我们的目的是介绍法国数学家嘉当（E. Cartan）的活动标架法，同时介绍相应的数学工具——外微分形式。不过为了使学生容易接受，开始时我们还是用向量分析的方法讲授三维欧氏空间的曲线和曲面的局部理论，到了曲面论的基本定理和曲面上的内蕴几何部分，由于用向量符号表达起来不方便，我们采用了张量符号，使学生稍稍接触一些张

量分析的方法。最后，我们在第三章里用嘉当的活动标架法把曲线论和曲面论又复习一遍，使学生既学习了新方法，同时又加深对已学过的知识的理解。

杭州大学的白正国教授和北京师范大学的朱鼎勋教授在审查这本教材时提出了不少宝贵的意见，我们谨在此表示衷心的感谢。同时希望使用这本教材的兄弟院校的同志对教材中的错误缺点和不足之处给予批评指正。

梅向明　黄敬之

1981 年 4 月于北京师范学院数学系

目　录

第一章

曲　线　论

§1　向 量 函 数

在本书的学习中，要广泛地应用向量分析的知识，因此在这里对向量分析的基本内容作简单扼要的介绍.

首先介绍向量函数的概念.

给出一点集 G，如果对于 G 中每一个点 x，有一个确定的向量 $\boldsymbol{r}$ 和它对应，则我们说，在 G 上给定了一个向量函数，记作

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x), x\in G.$$

例如，设 G 是实数轴上一区间 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$，则得一元向量函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t).$$

设 G 是一平面域，$(u,v)\in G$，则得二元向量函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v).$$

设 G 是空间中一区域，$(x,y,z)\in G$，则得三元向量函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x,y,z).$$

正如数学分析中对实函数所讨论的那样，我们也对向量函数引进极限、连续、微商和积分等概念.

1.1　向量函数的极限

设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是所给的一元向量函数，$\boldsymbol{a}$ 是常向量(即长度与方向都固定的向量)，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在数 $\delta>0$，使得当 $0<$

$|t-t_0|<\delta$ 时

$$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|<\varepsilon$$

成立，则我们说，当 $t\to t_0$ 时，向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 趋于极限 $\boldsymbol{a}$. 记作

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{a}. \tag{1.1}$$

有关数量函数的极限性质，都可以推广到向量函数的情况，从而得到类似的命题.

命题 1 如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{s}(t)$ 是两个一元向量函数，$\lambda(t)$ 是一个实函数，并且当 $t\to t_0$ 时这些函数的值趋向极限

$$\boldsymbol{r}(t)\to\boldsymbol{a},\boldsymbol{s}(t)\to\boldsymbol{b},\lambda(t)\to m,$$

即 $|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|\to 0$，$|\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}|\to 0$，$|\lambda(t)-m|\to 0$，则有

(1) 两个向量函数之和(差)的极限等于极限之和(差)：

$$\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}.$$

(2) 乘积 $\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)$（数量乘向量）的极限等于极限的乘积：

$$\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)\longrightarrow m\boldsymbol{a}.$$

(3) 数量积 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)$ 的极限等于极限的数量积：

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

(4) 向量积 $\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)$ 的极限等于极限的向量积：

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

证明 这些命题的证明原则上和数学分析中关于实函数所对应的命题的证明没有什么区别.

(1)
$$\begin{aligned}&|(\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t))-(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})|\\=&|(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a})\pm(\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b})|\\\leqslant&|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}|,\end{aligned}$$

当 $t\to t_0$ 时，由已知条件 $|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|\to 0$，$|\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}|\to 0$，有

$$|(\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t))-(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})|\longrightarrow 0,$$

即
$$\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}.$$

(2) 作出向量的差

$$\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)-m\boldsymbol{a}=\lambda(t)(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a})+(\lambda(t)-m)\boldsymbol{a},$$

由此得出

$$|\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)-m\boldsymbol{a}|\leqslant|\lambda(t)||\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|+|\lambda(t)-m||\boldsymbol{a}|,$$

当 $t\to t_0$ 时，由已知条件 $|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|\to 0$，$|\lambda(t)-m|\to 0$ 及

$$|\lambda(t)|\to|m|,\ |\boldsymbol{a}|\text{是常数},$$

有

$$|\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)-m\boldsymbol{a}|\to 0,$$

即

$$\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)\longrightarrow m\boldsymbol{a}.$$

(3) 作出数量差

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{s}(t)+(\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a},$$

由此得出

$$|\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{s}(t)|+|(\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}|. \tag{1.2}$$

因为任何两个向量 $\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$ 的数量积 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos(\widehat{\boldsymbol{pq}})$，所以

$$|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}|\leqslant|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|.$$

因此，如果 $\boldsymbol{p}$ 趋于零(即 $|\boldsymbol{p}|\to 0$)，而 $\boldsymbol{q}$ 趋于确定的极限 $\boldsymbol{q}_0$(此时有 $|\boldsymbol{q}|\to|\boldsymbol{q}_0|$)，那么不等式的右边趋向于零. 这时有

$$|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}|\longrightarrow 0.$$

因而当 $t\to t_0$ 时，我们由已知条件

$$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|\longrightarrow 0,\ |\boldsymbol{s}(t)|\longrightarrow|\boldsymbol{b}|,$$

知不等式(1.2)右边第一项有

$$|(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{s}(t)|\longrightarrow 0,$$

同理

$$|(\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}|\longrightarrow 0.$$

于是得到

$$|\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\longrightarrow 0,$$

即

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

(4) 作出向量的差

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{s}(t)+$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}),$$

由此得出

$$|\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\leqslant|(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{s}(t)|+ |\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b})|. \quad (1.3)$$

因为两个向量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的向量积的模 $|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}|=|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cdot|\sin(\widehat{\boldsymbol{pq}})|$，所以 $|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}|\leqslant|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|$. 因此，如果 $|\boldsymbol{p}|\to 0$，而 $|\boldsymbol{q}|$ 趋于确定的极限，则 $|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}|\to 0$.

把这个结论应用到不等式(1.3)的右边，便有当 $t\to t_0$ 时，由已知条件可得到

$$|\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\to 0,$$

即

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

1.2 向量函数的连续性

有了向量函数的极限概念，我们就可以引进向量函数的连续性概念. 给出一元向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$，当 $t\to t_0$ 时，若向量函数 $\boldsymbol{r}(t)\to\boldsymbol{r}(t_0)$，则称向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 点是**连续的**.

利用极限的定义，我们把向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 连续的定义可表示为

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t_0).$$

如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 在区间 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 的每一点都连续，则称 **$\boldsymbol{r}(t)$ 在区间 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 上是连续**[①]**的**.

利用命题 1 的结果，我们可以得到：

命题 2 如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{s}(t)$ 是在点 t_0 连续的向量函数，而 $\lambda(t)$ 是在点 t_0 连续的实函数，则向量函数 $\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)$，$\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)$，$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)$ 和实函数 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)$ 也都在点 t_0 连续(把命题中的点 t_0 改为

---

① 在端点 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 处指的是右连续和左连续.

区间 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 时，命题也成立）.

1.3 向量函数的微商

设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是定义在区间 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 上的一个向量函数. 设 $t_0 \in (t_1, t_2)$，如果极限

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

存在，则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 点是可微分的，这个极限称为 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 点的**微商**（或**导矢**），用 $\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}$ 或 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 表示，即

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} = \boldsymbol{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 在某个开区间的每一点都有微商存在，则我们说 $\boldsymbol{r}(t)$ 在**此区间内是可微的**或简称**向量函数** $\boldsymbol{r}(t)$ **是可微的**，它的微商记为 $\boldsymbol{r}'(t)$.

对于向量函数的微分法有以下命题：

命题 3 设 $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{s}(t), \boldsymbol{u}(t)$ 分别是可微的向量函数，$\lambda(t)$ 是可微的实函数，则 $\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)$，$\boldsymbol{r}(t) \pm \boldsymbol{s}(t)$，$\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{s}(t)$，$\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{s}(t)$，$(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{s}(t), \boldsymbol{u}(t))$ 都是可微的，并且

$$(\lambda \boldsymbol{r})' = \lambda \boldsymbol{r}' + \lambda' \boldsymbol{r},$$

$$(\boldsymbol{r} \pm \boldsymbol{s})' = \boldsymbol{r}' \pm \boldsymbol{s}',$$

$$(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s})' = \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{s} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}',$$

$$(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s})' = \boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s}',$$

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{u})' = (\boldsymbol{r}', \boldsymbol{s}, \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}', \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{u}').$$

这些公式的证明和数学分析中实函数的对应公式的证明相似，但是应该注意的是向量的向量积和混合积跟向量的次序有关，不能把次序任意交换. 作为例子，我们证明后面三个结果.

$$(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s})' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t + \Delta t) \times \boldsymbol{s}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{s}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{[\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)]\times \boldsymbol{s}(t+\Delta t)}{\Delta t}+\frac{\boldsymbol{r}(t)\times[\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{s}(t)]}{\Delta t}\right\}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\times\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{s}(t+\Delta t)+\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{r}(t)\times\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{s}(t)}{\Delta t}$$

$$=\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}'(t).$$

$$(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})'=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)\cdot\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{[\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)]\cdot\boldsymbol{s}(t+\Delta t)}{\Delta t}+\frac{\boldsymbol{r}(t)\cdot[\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{s}(t)]}{\Delta t}\right\}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{s}(t+\Delta t)+\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{r}(t)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{s}(t)}{\Delta t}$$

$$=\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}'(t).$$

由上面的结果可以得到

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})'&=[(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{u}]'\\&=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})'\cdot\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{u}'\\&=[\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}']\cdot\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{u}'\\&=(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}')\cdot\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})\boldsymbol{u}'\\&=(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}',\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u}').\end{aligned}$$

向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的微商 $\boldsymbol{r}'(t)$ 仍为 t 的一个向量函数,如果函数 $\boldsymbol{r}'(t)$ 也是连续的和可微的,则 $\boldsymbol{r}'(t)$ 的微商 $\boldsymbol{r}''(t)$ 称为 $\boldsymbol{r}(t)$ 的**二阶微商**. 类似地可以定义三阶、四阶等等的微商. 在区间 $[t_1,t_2]$ 上有直到 k 阶连续微商的函数称为这区间上的 **k 次可微函数**或 **C^k 类函数**,连续函数也称为 C^0 类函数,无限可微的函数记为 C^∞ 类函

数. 解析函数记为 C^{ω} 类函数.

设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是笛卡儿直角坐标系的三个基向量,向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$可以表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3,$$

所以每一个向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$与三个有序实函数组$\{x(t),y(t),z(t)\}$一一对应.

命题 4 如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$在$[t_1,t_2]$上是 C^k 类函数,则向量函数所对应的三个实函数 $x(t),y(t),z(t)$在$[t_1,t_2]$上是 C^k 类函数.

证明 将 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$ 两边点乘 $\boldsymbol{e}_1$ 得

$$x(t)=\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{e}_1.$$

由于 $\boldsymbol{e}_1$ 是常向量,而 $\boldsymbol{r}(t)$是 C^k 类函数,所以 $x(t)$是 C^k 类函数.

同理可证 $y(t),z(t)$是 C^k 类函数.

1.4 向量函数的泰勒(Taylor)公式

定理 设向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$在$[t_0,t_0+\Delta t]$上是 C^{n+1} 类函数,则有泰勒展开式

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\Delta t\boldsymbol{r}'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\boldsymbol{r}''(t_0)+\cdots+$$
$$\frac{(\Delta t)^n}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}[\boldsymbol{r}^{(n+1)}(t_0)+\boldsymbol{\varepsilon}(t_0,\Delta t)],$$

其中 $\Delta t\to 0$ 时,$\boldsymbol{\varepsilon}(t_0,\Delta t)\to\boldsymbol{0}$.

证明 向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$可表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3.$$

由已知条件在$[t_0,t_0+\Delta t]$上有 $\boldsymbol{r}(t)\in C^{n+1}$,所以在$[t_0,t_0+\Delta t]$上有 $x(t),y(t),z(t)\in C^{n+1}$. 根据实函数的泰勒公式得知

$$x(t_0+\Delta t)=x(t_0)+\Delta tx'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}x''(t_0)+\cdots+$$
$$\frac{(\Delta t)^n}{n!}x^{(n)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}(x^{(n+1)}(t_0)+\varepsilon_1(t_0,\Delta t)),$$

$$y(t_0+\Delta t)=y(t_0)+\Delta t y'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}y''(t_0)+\cdots+$$

$$\frac{(\Delta t)^n}{n!}y^{(n)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}(y^{(n+1)}(t_0)+\varepsilon_2(t_0,\Delta t)),$$

$$z(t_0+\Delta t)=z(t_0)+\Delta t z'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}z''(t_0)+\cdots+$$

$$\frac{(\Delta t)^n}{n!}z^{(n)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}(z^{(n+1)}(t_0)+\varepsilon_3(t_0,\Delta t)).$$

把上式分别乘以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 再相加,则得到所求的向量函数的泰勒公式

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\Delta t\boldsymbol{r}'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\boldsymbol{r}''(t_0)+\cdots+$$

$$\frac{(\Delta t)^n}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}[\boldsymbol{r}^{(n+1)}(t_0)+\boldsymbol{\varepsilon}(t_0,\Delta t)].$$

当 $\boldsymbol{r}(t)\in C^{\infty}$ 时,我们就可以把它展成泰勒级数,即

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\Delta t\boldsymbol{r}'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\boldsymbol{r}''(t_0)+\cdots+$$

$$\frac{(\Delta t)^n}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)+\cdots,$$

上述泰勒级数是收敛的.

1.5 向量函数的积分

向量函数的积分的定义和实函数的情形相同,即

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{r}(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),$$

其中 $a=t_0,t_1,\cdots,t_{n-1},t_n=b$ 表示区间 $[a,b]$ 的分点,ξ_i 是区间 (t_{i-1},t_i) 中的任一点,当 $n\to\infty$ 时,$|t_i-t_{i-1}|\to 0$.

如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$ 是可积的,则有

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\int_a^b (x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3)\mathrm{d}t$$

$$= \boldsymbol{e}_1\int_a^b x(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_2\int_a^b y(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_3\int_a^b z(t)\mathrm{d}t,$$

即

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{e}_1\int_a^b x(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_2\int_a^b y(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_3\int_a^b z(t)\mathrm{d}t.$$

由此可得出有关向量函数积分的命题：

命题 5 如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则积分

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t$$

存在，并且

1° $a<c<b$ 时有

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t = \int_a^c \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t + \int_c^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t.$$

2° m 是常数时有

$$\int_a^b m\boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t = m\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t.$$

3° 如果 $\boldsymbol{m}$ 是常向量，则有

$$\int_a^b \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{m}\cdot\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_a^b \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{m}\times\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t.$$

4° $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t\right] = \boldsymbol{r}(x).$

证明 向量函数可以表示为

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_1 + y(t)\boldsymbol{e}_2 + z(t)\boldsymbol{e}_3. \tag{1.4}$$

根据命题 4 可知若 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 $[a,b]$ 上是连续函数（C^0 类函数），则 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 在 $[a,b]$ 上也是连续函数（C^0 类函数）.

再由实函数的积分定理可知，在区间 $[a,b]$ 上连续的实函数在该区间上是可积的，即积分

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}t, \int_a^b y(t)\mathrm{d}t, \int_a^b z(t)\mathrm{d}t$$

存在，则由(1.4)式可知积分

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t$$

存在且等于

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{e}_1\int_a^b x(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_2\int_a^b y(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_3\int_a^b z(t)\mathrm{d}t.$$

以下我们只证明 1°，其余的结果请读者自己证明.

由于

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{e}_1\int_a^b x(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_2\int_a^b y(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_3\int_a^b z(t)\mathrm{d}t,$$

若 $a<c<b$ 时，根据实函数的积分性质可得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_1\int_a^b x(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_2\int_a^b y(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_3\int_a^b z(t)\mathrm{d}t \\
=&\boldsymbol{e}_1\left[\int_a^c x(t)\mathrm{d}t + \int_c^b x(t)\mathrm{d}t\right] + \boldsymbol{e}_2\left[\int_a^c y(t)\mathrm{d}t + \int_c^b y(t)\mathrm{d}t\right] + \\
&\boldsymbol{e}_3\left[\int_a^c z(t)\mathrm{d}t + \int_c^b z(t)\mathrm{d}t\right] \\
=&\boldsymbol{e}_1\int_a^c x(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_2\int_a^c y(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_3\int_a^c z(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_1\int_c^b x(t)\mathrm{d}t + \\
&\boldsymbol{e}_2\int_c^b y(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_3\int_c^b z(t)\mathrm{d}t \\
=&\int_a^c \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t + \int_c^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

下面我们介绍有关向量函数的两个命题，这两个命题在以后要用到.

我们在这里假定所给出的向量函数具有所需要的各阶连续微商.

命题 6 向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 具有固定长的充要条件是对于 t 的每一个值，$\boldsymbol{r}'(t)$ 都与 $\boldsymbol{r}(t)$ 垂直.

证明 由所给条件 $|\boldsymbol{r}(t)|=$ 常数，有

$$\boldsymbol{r}^2(t) = |\boldsymbol{r}(t)|^2 = \text{常数}.$$

上式对 t 求微分得

$$2\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0,$$

由此得到

$$\boldsymbol{r}(t)\perp\boldsymbol{r}'(t).$$

反之,如果 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0$,则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}^2(t)=0.$$

因而得到

$$\boldsymbol{r}^2(t)=\text{常数},$$

即

$$|\boldsymbol{r}(t)|=\text{常数}.$$

特别地,对于可微的单位向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$(即 $|\boldsymbol{r}(t)|=1$),有 $\boldsymbol{r}(t)\perp\boldsymbol{r}'(t)$.

为了介绍以下命题,我们先引入关于向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 对于变量 t 的旋转速度的概念. 这个旋转速度对于 t 的不同的值一般来说具有不同的值.

我们给出以下定义:给 t 以增量 Δt,用 $\Delta\varphi$ 表示由向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 所组成的角(如图 1-1),作成比值 $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$,当 Δt 趋于零时,则 $\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|$ 的极限就叫做向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 对于它的变量 t 的**旋转速度**.

命题 7 单位向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$(即 $|\boldsymbol{r}(t)|=1$)关于 t 的旋转速度等于其微商的模 $|\boldsymbol{r}'(t)|$.

证明 把 $\boldsymbol{r}(t)$,$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 移动到同一个始点 O(如图 1-2),以 O 为圆心画单位圆,它通过 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 的终点 M、M',则两个向量的夹角大小等于 $\overset{\frown}{MM'}$ 的长度. 于是有

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|\Delta t|}=\frac{|\overrightarrow{MM'}|}{|\Delta t|}\cdot\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|\overrightarrow{MM'}|},$$

因为

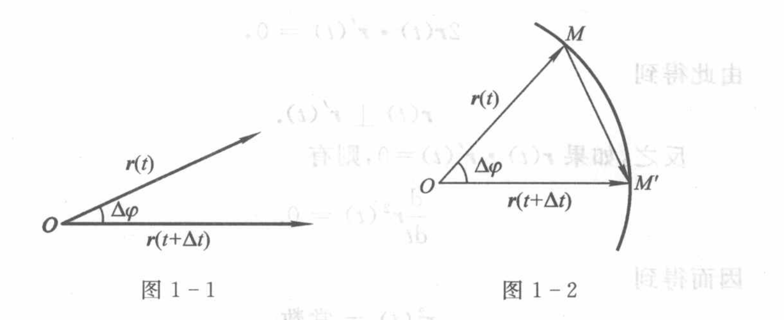


图 1－1　　　　图 1－2

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{MM'},$$

所以有

$$|\overrightarrow{MM'}|=|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|,$$

于是

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=\left|\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\right|\cdot\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|\overrightarrow{MM'}|}.$$

由于当 Δt 趋于零时有

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|\overrightarrow{MM'}|}=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta\varphi}{2\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}=1.$$

因此

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\right|\cdot\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|\overrightarrow{MM'}|}$$
$$=|\boldsymbol{r}'(t)|.$$

习　题

1. 证明本节命题 3、命题 5 中未加证明的结论.

2. 求证常向量的微商等于零向量.

3. 证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}(t)}{\rho(t)}\right)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)\rho(t)-\boldsymbol{r}(t)\rho'(t)}{\rho^2(t)}.$$

4. 利用向量函数的泰勒公式证明：如果向量在某一区间内所有的点其微商为零，则此向量在该区间是常向量.

5. 证明 $\boldsymbol{r}(t)$具有固定方向的充要条件是 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'=\mathbf{0}$.

6. 证明 $\boldsymbol{r}(t)$平行于固定平面的充要条件是$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')=0$.

§ 2　曲线的概念

曲线是微分几何所研究的主要对象之一，因而我们需要首先弄清楚曲线的概念.

2.1　曲线的概念

为了定义曲线的概念，先介绍一些关于映射的知识.

给出两个集合 E 和 E'，如果集合 E 中的每一个点(或称元素) x，有 E'中的点 x'和它对应，则我们说给定了 E 到 E'的一个**映射** f. x'称为点 x 的**像**，x 称为 x'的**原像**.

对于任取集合 E 中的点 x_1 和 x_2，如果 $x_1\neq x_2$ 时有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称映射 f 是**一一的**(或称**单的**).

在欧氏空间中给出两个集合 E，E'，对于 E 中的任一个点 x_0 和任一个数 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，使得对于 E 中与 x_0 的距离小于 δ 的任意一点 x 来说，点 $f(x)$与 $f(x_0)$间的距离小于 ε，则称映射 f 为连续的.

如果 $f(E)=E'$，我们就说 f 是从 E 到 E'的**在上映射**(或称**满映射**)，也就是说在 f 的作用下把 E 变到整个 E'上去.

下面建立简单曲线的概念.

如果一个开的直线段到三维欧氏空间内建立的对应 f 是一一的，双方连续的在上映射(这种映射称为**拓扑映射**或**同胚**)，则我们把三维欧氏空间中的映射的像称为**简单曲线段**. 例如开的直线

段映射到开圆弧(即圆周的一部分),这种映射是一一的,双方连续的在上映射(如图 1-3),因此开圆弧是简单曲线段.

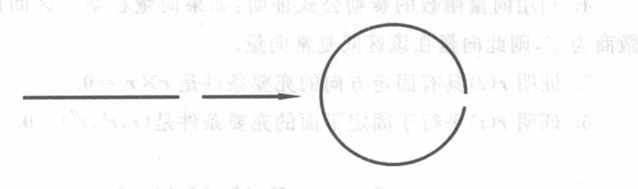


图 1-3

又例如在一张长方形的纸上画一条斜的直线(如图 1-4),然后把这张纸卷成圆柱面,则直线成为圆柱螺线.因而圆柱螺线是简单曲线段.

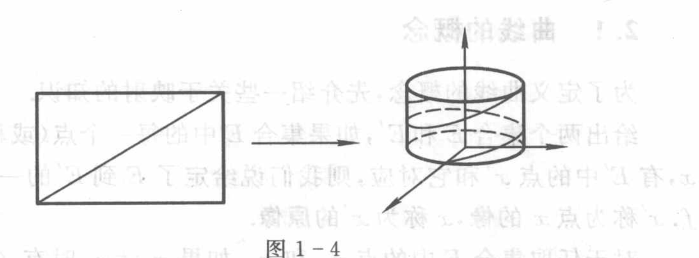


图 1-4

对任意曲线的"小范围"的研究,总可以作为简单曲线段来研究.我们以后所讨论的曲线都是简单曲线段,不另作声明.

根据上述曲线的概念,我们可以确立曲线的方程.在直线段上引入坐标 $t(a<t<b)$,在空间中引入笛卡儿直角坐标(x,y,z),则上述映射的解析表达式是

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \quad a<t<b. \\ z=h(t), \end{cases} \tag{1.5}$$

习惯上,经常把(1.5)中的函数关系符号 f,g,h 分别写成 x,y,z,这样,(1.5)可写为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad a < t < b. \\ z = z(t), \end{cases} \tag{1.6}$$

(1.6)称为曲线的**参数表示**或**参数方程**，t 称为**曲线的参数**.

例如，我们已经知道开圆弧是开直线段的像，取开直线段为$(0,2\pi)$，则在 xy 平面上，开圆弧的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad 0 < t < 2\pi,$$

其中 a 为圆的半径.

开的椭圆弧的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 < t < 2\pi.$$

对于圆柱螺线，我们可以这样建立它的参数方程. 设直圆柱底半径为 a，在长方形中斜线与长方形的一边的夹角为 φ_0（如图 1－5）. 由圆柱螺线上任一点 M 作 xy 平面的垂线为 MN. 设 ON 与 Ox 轴的夹角为 t，则有 $AN = at$，$MN = at\tan\varphi_0 = bt$（设 $b = a\tan\varphi_0$）. 于是圆柱螺线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \quad -\infty < t < +\infty. \\ z = bt, \end{cases}$$

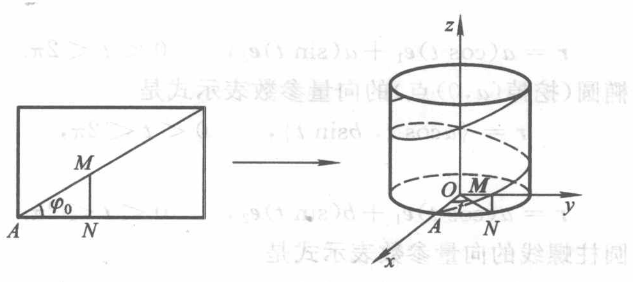


图 1－5

由于向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 可表示为 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$，因而曲线的参数方程(1.6)也可以写成向量函数的形式:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\qquad a<t<b.$$

这就是说,在空间中给定一个点 O,以这个点作为始点放上对于 t 的所有值的向量 $\boldsymbol{r}(t)$. 于是对于 t 的每个值,我们得到确定的向量 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}(t)$(如图 1-6),它的始点是点 O,而终点 M 则与 t 值有关,当 t 在 (a,b) 内变化时,点 M 在空间中画出一条轨迹,这就是由参数 t 所给定的曲线. 点 M 的向量表达式称为曲线的**向量参数表示**.

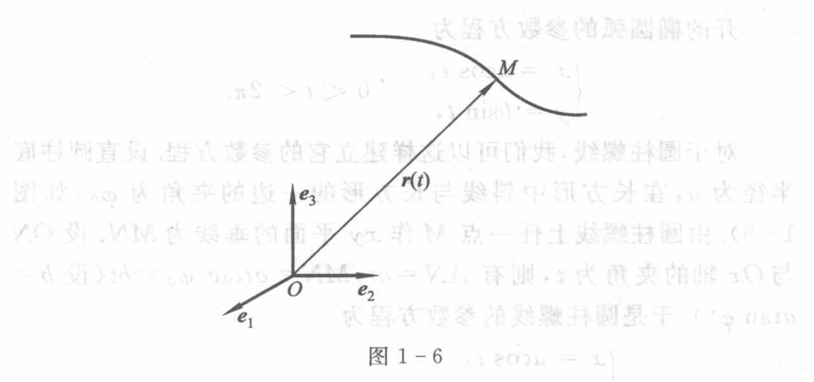


图 1-6

例如圆(挖掉 $(a,0)$ 点)的向量参数表示式是

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos t,\ a\sin t\},\qquad 0<t<2\pi,$$

即

$$\boldsymbol{r}=a(\cos t)\boldsymbol{e}_1+a(\sin t)\boldsymbol{e}_2,\qquad 0<t<2\pi.$$

椭圆(挖掉 $(a,0)$ 点)的向量参数表示式是

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos t,\ b\sin t\},\qquad 0<t<2\pi,$$

即

$$\boldsymbol{r}=a(\cos t)\boldsymbol{e}_1+b(\sin t)\boldsymbol{e}_2,\qquad 0<t<2\pi.$$

圆柱螺线的向量参数表示式是

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos t,\ a\sin t, bt\},\qquad -\infty<t<+\infty,$$

即

$$\boldsymbol{r} = a(\cos t)\boldsymbol{e}_1 + a(\sin t)\boldsymbol{e}_2 + bt\boldsymbol{e}_3, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

2.2 光滑曲线　曲线的正常点

如果曲线的参数表示式

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad a < t < b \\ z = z(t), \end{cases}$$

或

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad a < t < b$$

中的函数是 k 阶连续可微的函数，则把这曲线称为 C^k **类曲线**. 当 $k=1$ 时，也就是 C^1 类的曲线又称为**光滑曲线**.

给出 C^1 类的曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，假设对于曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 上一点 $(t=t_0)$ 有

$$\boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{0},$$

则这一点称为曲线的**正常点**.

注意条件 $\boldsymbol{r}'(t_0)\neq\boldsymbol{0}$ 表示 $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ 中至少有一个不等于零.

以后我们只考虑曲线的正常点，即假设 $\boldsymbol{r}'(t)\neq\boldsymbol{0}$，实际上 $\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{0}$ 是很特殊的. 如果在一段曲线上 $\boldsymbol{r}'(t)\equiv\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{r}(t)$ 变成常向量，这时这段曲线缩成一点，所以一段曲线上 $\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{0}$ 的点一般是孤立点. 曲线(C)上所有点都是正常点时，则称(C)为**正则曲线**.

给出曲线

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \qquad a < t < b,$$

即

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \qquad a < t < b, \\ z = z(t), \end{cases}$$

则在曲线的正常点（例如，设 $x'(t_0)\neq 0$）的充分小邻域里，曲线可由形如

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ z = \psi(x) \end{cases}$$

的方程来表示.

这是因为由于 $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{0}$，而我们假设 $x'(t_0) \neq 0$，于是函数 $x = x(t)$ 在 t_0 邻近有连续而可微的反函数 $t = t(x)$. 把它代入

$$\begin{cases} y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

中得

$$\begin{cases} y = y(t(x)), \\ z = z(t(x)), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ z = \psi(x). \end{cases}$$

例如对于圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(t) = \{a\cos t, a\sin t, bt\}(-\infty < t < +\infty)$ 有 $\boldsymbol{r}'(t) = \{-a\sin t, a\cos t, b\}$. 由于 $b \neq 0$ 所以在曲线上任何 t 值 $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{0}$，因此圆柱螺线上的点都是正常点，因而由 $z = bt$ 得出 $t = \frac{1}{b}z$，把它代入

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t \end{cases}$$

中得

$$\begin{cases} x = a\cos \dfrac{z}{b}, \\ y = a\sin \dfrac{z}{b}, \end{cases}$$

这是圆柱螺线的另一种表示法.

2.3 曲线的切线和法面

给出曲线上一点 P，点 Q 是 P 的邻近一点（如图 1－7），把割

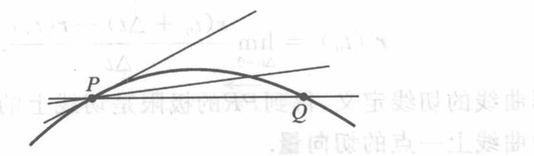


图 1－7

线 PQ 绕 P 点旋转，使 Q 点沿曲线趋近于 P 点，若割线 PQ 趋近于一定的位置，则我们把这个割线 PQ 的极限位置称为曲线在 P 点的**切线**. 而定点 P 称为**切点**. 直观上看，切线是通过切点的所有直线当中最贴近曲线的直线.

设曲线的参数方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t);$$

切点 P 对应参数 t_0，Q 点对应参数 $t_0+\Delta t$（如图 1－8），则有

$$\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0).$$

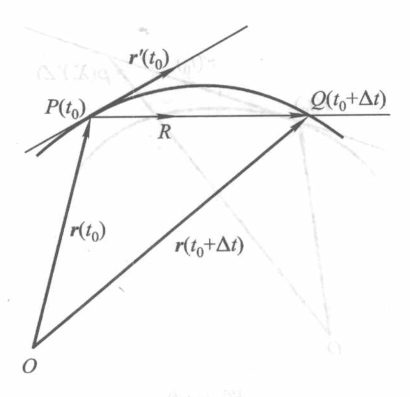


图 1－8

在割线 PQ 上作向量 $\overrightarrow{PR}$，使得

$$\overrightarrow{PR}=\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

当 $Q\to P$（即 $\Delta t\to 0$）时，若 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 可微，则由向量函数的微商可得向量 $\overrightarrow{PR}$ 的极限

$$\boldsymbol{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

根据曲线的切线定义，得到$\overrightarrow{PR}$的极限是切线上的一向量$\boldsymbol{r}'(t)$，它称为曲线上一点的**切向量**.

由于我们已规定只研究曲线的正常点，即$\boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{0}$，所以曲线上一点的切向量是存在的. 而这个切向量就是切线上的一个非零向量. 由以上的推导过程可以看出，这个切向量的正向和曲线的参数t的增量方向是一致的.

现在我们导出曲线上一点的切线方程.

我们仍设曲线上一个切点P所对应的参数为t_0，P点的向径是$\boldsymbol{r}(t_0)$，$\boldsymbol{\rho} = \{X, Y, Z\}$是切线上任一点的向径（如图1-9），因为$\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}(t_0) \parallel \boldsymbol{r}'(t_0)$，则得$P$点的切线方程为

$$\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}(t_0) = \lambda \boldsymbol{r}'(t_0),$$

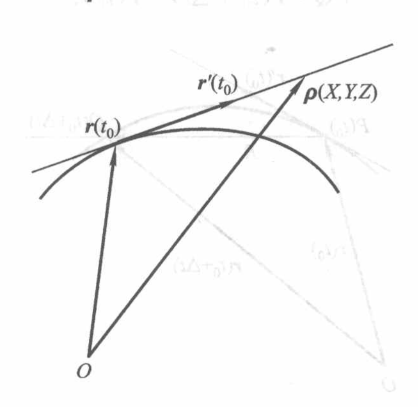


图 1－9

其中λ为切线上的**参数**.

下面再导出用坐标表示的切线方程. 设

$$\boldsymbol{r}(t_0) = \{x(t_0), y(t_0), z(t_0)\},$$

$$\boldsymbol{r}'(t_0) = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\},$$

则由上述切线方程消去λ得到

$$\frac{X-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{Y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{Z-z(t_0)}{z'(t_0)},$$

这是坐标表示的切线方程.

例 1 求圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(t)=\{a\cos t,a\sin t,bt\}$ 在 $t=\frac{\pi}{3}$ 处的切线方程.

解

$$\boldsymbol{r}(t)=\{a\cos t,a\sin t,bt\},$$
$$\boldsymbol{r}'(t)=\{-a\sin t,a\cos t,b\},$$

$t=\frac{\pi}{3}$ 时,有

$$\boldsymbol{r}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left\{\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{\pi b}{3}\right\}$$
$$\boldsymbol{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},b\right\}.$$

所以切线的方程为

$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\lambda\boldsymbol{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

即

$$\boldsymbol{\rho}=\frac{1-\lambda\sqrt{3}}{2}a\boldsymbol{e}_1+\frac{\sqrt{3}+\lambda}{2}a\boldsymbol{e}_2+\left(\frac{\pi}{3}+\lambda\right)b\boldsymbol{e}_3.$$

如果用坐标表示,则得切线方程为

$$\frac{X-\frac{a}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{Y-\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}}=\frac{Z-\frac{\pi}{3}b}{b},$$

即

$$\frac{2X-a}{-\sqrt{3}a}=\frac{2Y-\sqrt{3}a}{a}=\frac{Z-\frac{\pi}{3}b}{b}.$$

经过切点而垂直于切线的平面称为曲线的**法平面**或**法面**. 下面导出曲线的法面方程.

设曲线上一点 P,它所对应的参数为 t_0,P 点的向径是$\boldsymbol{r}(t_0)$,$\boldsymbol{\rho}(X,Y,Z)$是法面上任一点的向径(如图 1-10),则由

$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t_0)\perp \boldsymbol{r}'(t_0)$$

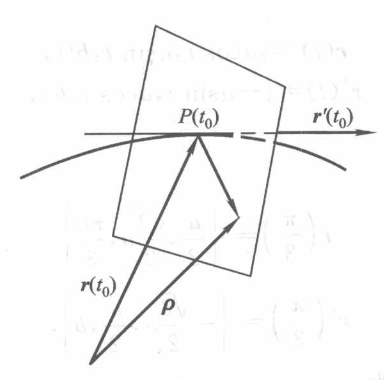


图 1-10

得到曲线的法面方程为

$$[\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t_0)]\cdot\boldsymbol{r}'(t_0)=0.$$

若设
$$\boldsymbol{r}(t_0)=\{x(t_0),y(t_0),z(t_0)\},$$
$$\boldsymbol{r}'(t_0)=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\},$$

则由上述法面方程得到

$$[X-x(t_0)]x'(t_0)+[Y-y(t_0)]y'(t_0)+[Z-z(t_0)]z'(t_0)=0,$$

这就是坐标表示的法面方程.

例 2 求圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(t)=\{a\cos t,a\sin t,bt\}$在 $t=\dfrac{\pi}{6}$处的法面方程.

解
$$\boldsymbol{r}(t)=\{a\cos t,a\sin t,bt\},$$
$$\boldsymbol{r}'(t)=\{-a\sin t,a\cos t,b\},$$

$t=\dfrac{\pi}{6}$时，有

$$\boldsymbol{r}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},\frac{\pi b}{6}\right\},$$

$$\boldsymbol{r}'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left\{-\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a,b\right\}.$$

所以法面的方程为

$$\left[\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\cdot\boldsymbol{r}'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0,$$

即

$$\left(X-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\left(-\frac{a}{2}\right)+\left(Y-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$$
$$+\left(Z-\frac{\pi}{6}b\right)b=0,$$

整理后得到

$$aX-\sqrt{3}aY-2bZ+\frac{\pi}{3}b^2=0.$$

2.4　曲线的弧长　自然参数

到现在为止，我们所取的参数 t 一般不具有几何意义，以后在理论问题中，我们经常用弧长作为曲线的参数.

设给出 C^1 类曲线(C)：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

曲线(C)上对应于 $\boldsymbol{r}(a)$和 $\boldsymbol{r}(b)$的点为 P_0 和 P_n. 在(C)上，介于 P_0 与 P_n 之间，顺着 t 递增的次序，取 $n-1$ 个点 $P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$，它们把曲线分为 n 个小弧段（如图 1－11）. 用直线段把相邻的分点连结起来，即得一条折线，它的长是

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}.$$

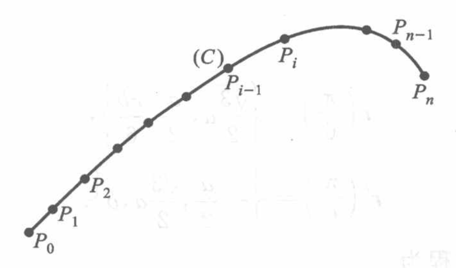


图 1-11

我们将证明，在所设的条件下，当分点无限制地增加，同时无限制地加"密"(即令 $\lambda_n=\max(t_i-t_{i-1})$，并使得$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$)时，$\sigma_n$ 趋于与分点的选择无关的一个确定的极限. 这个极限定义为曲线段$\widehat{P_0P_n}$的弧长. 我们还将证明，这个极限为

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\int_a^b|\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{1.7}$$

设分点 P_i 对应参数 $t_i(i=0,1,2,\cdots,n)$，特别地 $t_0=a,t_n=b$. 这样，

$$\overline{P_{i-1}P_i}=|\boldsymbol{r}(t_i)-\boldsymbol{r}(t_{i-1})|,$$

而

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}(t_i)-\boldsymbol{r}(t_{i-1})\\&=(x(t_i)-x(t_{i-1}))\boldsymbol{e}_1+(y(t_i)-y(t_{i-1}))\boldsymbol{e}_2+\\&\quad(z(t_i)-z(t_{i-1}))\boldsymbol{e}_3\\&=[x'(t_i')\boldsymbol{e}_1+y'(t_i'')\boldsymbol{e}_2+z'(t_i''')\boldsymbol{e}_3](t_i-t_{i-1}),\end{aligned}$$

其中 t_i',t_i'',t_i'''，都是 t_{i-1} 与 t_i 之间的值. 令

$$\boldsymbol{R}_i=x'(t_i')\boldsymbol{e}_1+y'(t_i'')\boldsymbol{e}_2+z'(t_i''')\boldsymbol{e}_3,$$

这时可写成

$$\boldsymbol{r}(t_i)-\boldsymbol{r}(t_{i-1})=\boldsymbol{R}_i(t_i-t_{i-1}).$$

为了证明(1.7)，我们估计以下的差：

$$\begin{aligned}&\overline{P_{i-1}P_i}-|\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|(t_i-t_{i-1})\\&=[|\boldsymbol{R}_i|-|\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|](t_i-t_{i-1}).\end{aligned} \tag{1.8}$$

现在

$$|\boldsymbol{R}_i|-|\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|=\frac{|\boldsymbol{R}_i|^2-|\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|^2}{|\boldsymbol{R}_i|+|\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|}$$

$$=\frac{\boldsymbol{R}_i^2-[\boldsymbol{r}'(t_{i-1})]^2}{|\boldsymbol{R}_i|+|\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|},$$

上式中

$$\boldsymbol{R}_i^2-[\boldsymbol{r}'(t_{i-1})]^2$$
$$=\{[x'(t_i')]^2+[y'(t_i'')]^2+[z'(t_i''')]^2\}-$$
$$\{[x'(t_{i-1})]^2+[y'(t_{i-1})]^2+[z'(t_{i-1})]^2\}$$
$$=\{[x'(t_i')]^2-[x'(t_{i-1})]^2\}+\{[y'(t_i'')]^2-$$
$$[y'(t_{i-1})]^2\}+\{[z'(t_i''')]^2-[z'(t_{i-1})]^2\},$$

此式右端的三项中,第一项是

$$[x'(t_i')]^2-[x'(t_{i-1})]^2$$
$$=[x'(t_i')+x'(t_{i-1})][x'(t_i')-x'(t_{i-1})]$$

其余两项是有关 y' 和 z' 的对应项. 由于

$$|\boldsymbol{R}_i|=\sqrt{[x'(t_i')]^2+[y'(t_i'')]^2+[z'(t_i''')]^2}$$
$$\geqslant|x'(t_i')|,$$

$$|\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|=\sqrt{[x'(t_{i-1})]^2+[y'(t_{i-1})]^2+[z'(t_{i-1})]^2}$$
$$\geqslant|x'(t_{i-1})|,$$

因此

$$\frac{|x'(t_i')+x'(t_{i-1})|}{|\boldsymbol{R}_i|+|\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|}\leqslant\frac{|x'(t_i')|+|x'(t_{i-1})|}{|\boldsymbol{R}_i|+|\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|}\leqslant 1.$$

与此同时,有关 y' 和 z' 的两个不等式也成立. 根据以上计算,即得

$$||\boldsymbol{R}_i|-|\boldsymbol{r}'(t_{i-1})||\leqslant|x'(t_i')-x'(t_{i-1})|+$$
$$|y'(t_i'')-y'(t_{i-1})|+|z'(t_i''')-z'(t_{i-1})|. \qquad (1.9)$$

由于 $x'(t),y'(t),z'(t)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的,从而也是一致连续的. 因此,已给 $\varepsilon>0$,当 n 充分大,而每一个小区间 $[t_{i-1},t_i]$ 充分短时,

$$|x'(t_i') - x'(t_{i-1})| < \varepsilon,$$

$$|y'(t_i'') - y'(t_{i-1})| < \varepsilon,$$

$$|z'(t_i''') - z'(t_{i-1})| < \varepsilon,$$

因此，在这个情况下，根据(1.8)与(1.9)有

$$|\overline{P_{i-1}P_i} - |\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|(t_i - t_{i-1})| < 3\varepsilon(t_i - t_{i-1}),$$

此时

$$\begin{aligned}
&\left|\sigma_n - \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|(t_i - t_{i-1})\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i} - |\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|(t_i - t_{i-1})| \\
&< 3\varepsilon \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \\
&= 3\varepsilon(b-a),
\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sigma_n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{r}'(t_{i-1})|(t_i - t_{i-1}) \\
&= \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

如果我们以 $\sigma(t)$ 表示从 $\boldsymbol{r}(a)$ 到 $\boldsymbol{r}(t)$ 的弧长，即

$$\sigma(t) = \int_a^t |\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

在此式中由于积分的上限大于下限，所得到的曲线的弧长总是正值.

现在我们定义一新函数 $s(t)$，使

$$s(t) = \begin{cases} \sigma(t), & \text{当 } t > a \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } t = a \text{ 时}, \\ -\sigma(t), & \text{当 } t < a \text{ 时}, \end{cases}$$

即

$$s(t)=\begin{cases}\int_a^t |\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t, 当\ t \geqslant a,\\ \int_t^a |\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t, 当\ t < a.\end{cases} \tag{1.10}$$

在此式中我们取 t 值可以大于 a，也可以小于 a，因此 $s(t)$ 也可能取负值，并按上述规定，t 增加的方向就是 s 增加的方向. 总之，s 表示为积分上限 t 的函数

$$s=s(t).$$

从(1.10)可以推出

$$s'(t)=|\boldsymbol{r}'(t)|>0.$$

由此可见，函数 $s(t)$ 是 t 的单调递增函数. 因而函数 $s(t)$ 的反函数存在，设此反函数为 $t=t(s)$. 把它代入曲线的方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 中得到以 s 为参数的曲线方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),$$

即

$$\begin{cases}x=x(s),\\ y=y(s),\\ z=z(s).\end{cases}$$

我们把 s 称为曲线的**自然参数**，上式就是曲线的自然参数表示式.

从(1.10)可以得出

$$\mathrm{d}s=|\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t, \tag{1.11}$$

或

$$\mathrm{d}s^2=\boldsymbol{r}'^2\,\mathrm{d}t^2=\mathrm{d}\boldsymbol{r}^2, \tag{1.12}$$

或

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2. \tag{1.13}$$

由(1.12)还可以推出

$$|\boldsymbol{r}'(s)|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|=1, \tag{1.14}$$

即向径关于自然参数的微商的模等于 1. 也就是说，引进自然参数 s 后，切向量 $\boldsymbol{r}'(s)$ 是单位向量. 这个导向量称为单位切向量.

以后我们用“点”代替“撇”表示向量函数对于自然参数的微商. 例如

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s},\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2},\text{等等}.$$

例 3 求双曲螺线 $\boldsymbol{r}=\{a\cosh t,a\sinh t,at\}$ 从 $t=0$ 起计算的弧长.

解 $\boldsymbol{r}=\{a\cosh t,a\sinh t,at\}$,

$\boldsymbol{r}'=\{a\sinh t,a\cosh t,a\}$.

从 $t=0$ 起计算的弧长为

$$\begin{aligned}\sigma&=\int_0^t|\boldsymbol{r}'(t)|\mathrm{d}t=\int_0^t\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^t\sqrt{a^2\sinh^2 t+a^2\cosh^2 t+a^2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^t\sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)+a^2\cosh^2 t}\mathrm{d}t\\&=\int_0^t\sqrt{a^2\cosh^2 t+a^2\cosh^2 t}\mathrm{d}t\\&=\sqrt{2}a\sinh t.\end{aligned}$$

习题

1. 对于圆柱螺线 $x=\cos t,y=\sin t,z=t$,求它在点(1,0,0)的切线和法面.

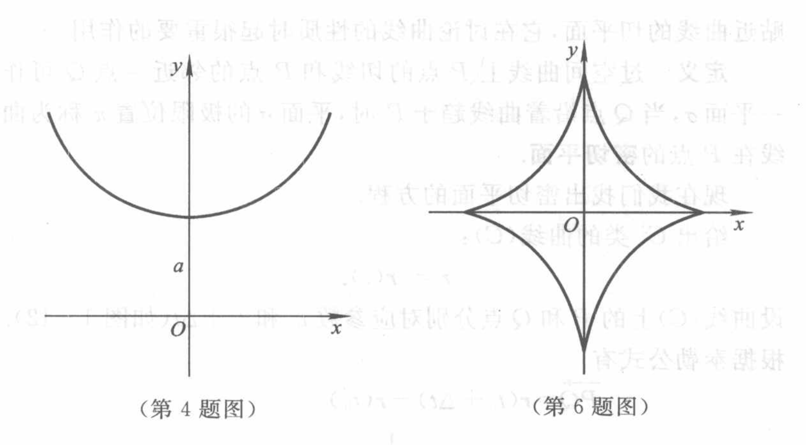
2. 求三次挠曲线 $\boldsymbol{r}=\{at,bt^2,ct^3\}$ 在点 t_0 的切线和法面.

3. 证明圆柱螺线 $\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta,a\sin\theta,b\theta\}(-\infty<\theta<+\infty)$ 的切线和 z 轴成固定角.

4. 求悬链线(如第 4 题图)$\boldsymbol{r}=\left\{t,a\cosh\dfrac{t}{a}\right\}(-\infty<t<+\infty)$ 从 $t=0$ 起计算的弧长.

5. 求抛物线 $y=bx^2$ 对应于 $-a\leqslant x\leqslant a$ 的一段的弧长.

6. 求星形线(如第 6 题图)$x=a\cos^3 t,y=a\sin^3 t$ 的弧长.



（第 4 题图）　　（第 6 题图）

7. 求旋轮线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 的 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 一段的弧长.

8. 求圆柱螺线 $x=3a\cos t, y=3a\sin t, z=4at$ 从它与 xy 平面的交点到任意点 $M(t)$ 的弧长.

9. 求曲线 $x^3=3a^2y, 2xz=a^2$ 在平面 $y=\frac{a}{3}$ 与 $y=9a$ 之间的弧长.

10. 将圆柱螺线 $\boldsymbol{r}=\{a\cos t, a\sin t, bt\}$ 化为自然参数表示.

11. 求用极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ 给定的曲线的弧长表达式.

§3　空间曲线

这一节，我们研究空间曲线的基本理论，主要将研究刻画空间曲线在某点邻近的弯曲程度和离开平面程度的量——曲率和挠率，以及研究空间曲线在一点邻近的近似形状，并找出决定空间曲线的条件.

3.1　空间曲线的密切平面

在§2 里我们已经讨论过，在 C^1 类曲线的正常点处，总存在一条切线，它是最贴近曲线的直线. 下面我们将指出，对于一条 C^2 类空间曲线而言，过曲线上一点有无数多个切平面，其中有一个最

贴近曲线的切平面，它在讨论曲线的性质时起很重要的作用.

定义 过空间曲线上 P 点的切线和 P 点的邻近一点 Q 可作一平面 σ，当 Q 点沿着曲线趋于 P 时，平面 σ 的极限位置 π 称为曲线在 P 点的**密切平面**.

现在我们找出密切平面的方程.

给出 C^2 类的曲线(C)：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t).$$

设曲线(C)上的 P 和 Q 点分别对应参数 t_0 和 $t_0+\Delta t$(如图 1－12).根据泰勒公式有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)\\&=\boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t+\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}''(t_0)+\boldsymbol{\varepsilon})\Delta t^2,\end{aligned}$$

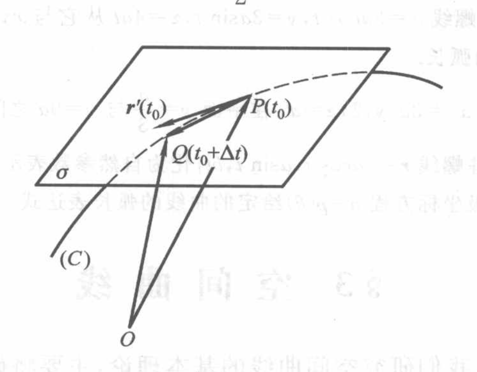


图 1－12

其中$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{0}$.

因为向量 $\boldsymbol{r}'(t_0)$和$\overrightarrow{PQ}$都在平面 σ 上，所以它们的线性组合

$$\frac{2}{\Delta t^2}[\overrightarrow{PQ}-\boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t]=\boldsymbol{r}''(t_0)+\boldsymbol{\varepsilon}$$

也在平面 σ 上.

当 Q 点沿着曲线趋于 P 时，$\Delta t\to 0$，这时 $\boldsymbol{r}'(t_0)$不动，但 $\boldsymbol{\varepsilon}\to\boldsymbol{0}$，这个线性组合向量就趋于 $\boldsymbol{r}''(t_0)$，所以平面 σ 的极限位置是向量

$\boldsymbol{r}'(t_0)$和$\boldsymbol{r}''(t_0)$所确定的平面. 也就是说,如果$\boldsymbol{r}''(t_0)$和曲线在P点的切向量$\boldsymbol{r}'(t_0)$不平行,即$\boldsymbol{r}'(t_0)\times\boldsymbol{r}''(t_0)\neq\boldsymbol{0}$①,这两个向量以及$P$点就完全确定了曲线在$P$点的密切平面.

根据以上的讨论,曲线(C)在$P(t_0)$点的密切平面(如图1-13)的方程是

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(t_0),\boldsymbol{r}'(t_0),\boldsymbol{r}''(t_0))=0,$$

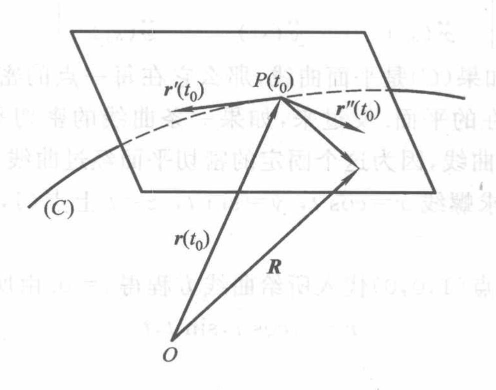


图 1-13

其中$\boldsymbol{R}=\{X,Y,Z\}$表示P点的密切平面上任意一点的向径.

上式也可用行列式表示为

$$\begin{vmatrix} X-x(t_0) & Y-y(t_0) & Z-z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}=0.$$

若曲线(C)用自然参数表示

---

① 对于曲线上某一点$(t=t_0)$若有

$$\boldsymbol{r}'(t_0)\times\boldsymbol{r}''(t_0)=\boldsymbol{0}\text{ 或 }\boldsymbol{r}'(t_0)\parallel\boldsymbol{r}''(t_0),$$

则这点称为曲线上的**逗留点**. 以后我们假定曲线上所讨论的点为非逗留点,即假定

$$\boldsymbol{r}'(t_0)\times\boldsymbol{r}''(t_0)\neq\boldsymbol{0}\text{ 或 }\boldsymbol{r}'(t_0)\nparallel\boldsymbol{r}''(t_0).$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s),$$

则曲线(C)在$P(s_0)$点的密切平面的方程是

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(s_0), \dot{\boldsymbol{r}}(s_0), \ddot{\boldsymbol{r}}(s_0)) = 0,$$

或

$$\begin{vmatrix} X - x(s_0) & Y - y(s_0) & Z - z(s_0) \\ \dot{x}(s_0) & \dot{y}(s_0) & \dot{z}(s_0) \\ \ddot{x}(s_0) & \ddot{y}(s_0) & \ddot{z}(s_0) \end{vmatrix} = 0.$$

注意:如果(C)是平面曲线,那么它在每一点的密切平面都是曲线(C)所在的平面. 反过来,如果一条曲线的密切平面固定,则曲线是平面曲线,因为这个固定的密切平面经过曲线上每一点.

例 1 求螺线$x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$上点$(1,0,0)$的密切平面.

解 把点$(1,0,0)$代入所给曲线方程得$t=0$. 由所给曲线

$$\boldsymbol{r} = \{\cos t, \sin t, t\}$$

可以求出

$$\boldsymbol{r}' = \{-\sin t, \cos t, 1\},$$

$$\boldsymbol{r}'' = \{-\cos t, -\sin t, 0\}.$$

把$t=0$代入得

$$\boldsymbol{r}(0) = \{1,0,0\},$$

$$\boldsymbol{r}'(0) = \{0,1,1\},$$

$$\boldsymbol{r}''(0) = \{-1,0,0\}.$$

所求密切平面的方程为

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y & Z \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$-Y + Z = 0.$$

3.2 空间曲线的基本三棱形

给出 C^2 类空间曲线(C)和(C)上一点 P. 设曲线(C)的自然参数表示是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),$$

其中 s 是自然参数,则由 §2 得知

$$\boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$$

是一单位向量. $\boldsymbol{\alpha}$ 称为曲线(C)上 P 点的**单位切向量**.

由于$|\boldsymbol{\alpha}|=1$,根据 §1 命题 6 可以得到

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}\perp\boldsymbol{\alpha},$$

即

$$\ddot{\boldsymbol{r}}\perp\dot{\boldsymbol{r}}.$$

在 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ 上取单位向量

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|}=\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|},\tag{1.15}$$

$\boldsymbol{\beta}$ 称为曲线(C)上 P 点的**主法向量**.

再作单位向量

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},$$

$\boldsymbol{\gamma}$ 称为曲线(C)上 P 点的**副法向量**.

我们把两两正交的单位向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 称为曲线上 P 点的**伏雷内(Frenet)标架**. 由 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 知伏雷内标架构成右手系(如图 1-14).

因为 $\boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{r}}$,$\boldsymbol{\beta}/\!/\ddot{\boldsymbol{r}}$,所以切向量和主法向量所确定的平面就是曲线(C)在 P 点的密切平面,又因为 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 都垂直于切向量 $\boldsymbol{\alpha}$,所以 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 所确定的平面是曲线上 P 点的法平面. 至于 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 所确定的平面则称为曲线(C)上 P 点的**从切平面**(如图 1-15).

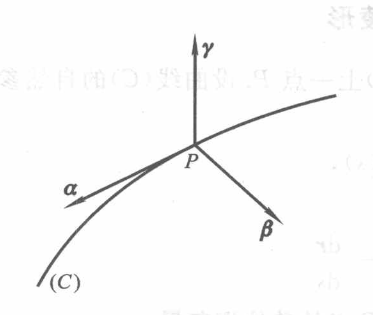


图 1－14

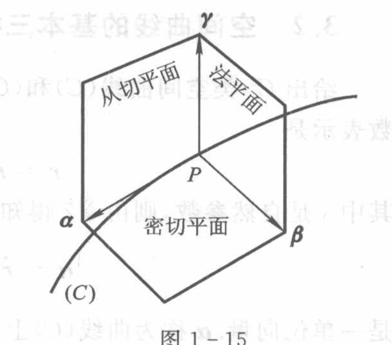


图 1－15

它们的方程分别为：

密切平面

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0,$$

或

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}})=0.$$

法平面

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\alpha}=0,$$

或

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=0.$$

从切平面

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\beta}=0,$$

或

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=0.$$

单位向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 也称为曲线的**基本向量**. 由三个基本向量和密切平面、法平面，从切平面所构成的图形称为曲线的**基本三棱形**(如图 1－15). 当一点 P 沿曲线(C)移动时，这个三棱形作为一个刚体来运动.

对于曲线(C)的一般参数表示

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),$$

有

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|},\boldsymbol{\gamma}=\frac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|},$$

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}=\frac{(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}''-(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}'')\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'||\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}.$$

例 2 求螺旋线 $x=\cos t$，$y=\sin t$，$z=t$ 在点(1,0,0)的切线、法平面、副法线、密切平面、主法线及从切平面的方程以及基本向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$.

解 由所给曲线

$$\boldsymbol{r}=\{\cos t,\sin t,t\},$$

先计算出

$$\boldsymbol{r}'=\{-\sin t,\cos t,1\},$$
$$\boldsymbol{r}''=\{-\cos t,-\sin t,0\}.$$

由螺旋线方程 $x=\cos t$，$y=\sin t$，$z=t$ 可知点(1,0,0)对应参数 $t=0$，所以

$$\boldsymbol{r}(0)=\{1,0,0\},$$
$$\boldsymbol{r}'(0)=\{0,1,1\},$$
$$\boldsymbol{r}''(0)=\{-1,0,0\}.$$

由此得出，在(1,0,0)点的切线方程为

$$\frac{X-1}{0}=\frac{Y-0}{1}=\frac{Z-0}{1},$$

即

$$\begin{cases}X-1=0,\\Y-Z=0.\end{cases}$$

法平面方程为

$$(X-1)\cdot 0+(Y-0)\cdot 1+(Z-0)\cdot 1=0,$$

即

$$Y+Z=0.$$

密切平面方程为

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y & Z \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$-Y+Z=0.$$

主法线方程为

$$\begin{cases} Y+Z=0, \\ -Y+Z=0, \end{cases}$$

即

$$Y=Z=0.$$

从切平面的方程为

$$(X-1)\cdot 1+(Y-0)\cdot 0+(Z-0)\cdot 0=0,$$

即

$$X-1=0.$$

副法线方程为

$$\begin{cases} Y+Z=0, \\ X-1=0. \end{cases}$$

以下求基本向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$：

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|}\bigg|_{t=0}=\frac{\{-\sin t,\cos t,1\}}{\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1}}\bigg|_{t=0}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{-\sin t,\cos t,1\}\bigg|_{t=0}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{0,1,1\}.$$

$$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha})\bigg|_{t=0}=\frac{(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}''-(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}'')\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'||\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}\bigg|_{t=0}$$

$$=\frac{\{-2,0,0\}-\{0,0,0\}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$$

$$=\{-1,0,0\}.$$

$$\gamma=\frac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}\bigg|_{t=0}=\frac{\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\{0,-1,1\}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{0,-1,1\}.$$

3.3 空间曲线的曲率、挠率和伏雷内(Frenet)公式

我们首先研究空间曲线的曲率的概念. 在不同的曲线或者同一条曲线的不同点处,曲线弯曲的程度可能不同. 例如半径较大的圆弯曲程度较小,而半径较小的圆弯曲的程度较大(如图 1-16);又如图 1-17 中所示,当沿着曲线从左向右移动时,曲线弯曲的程度变大. 为了准确地刻画曲线的弯曲程度,我们引进曲率的概念.

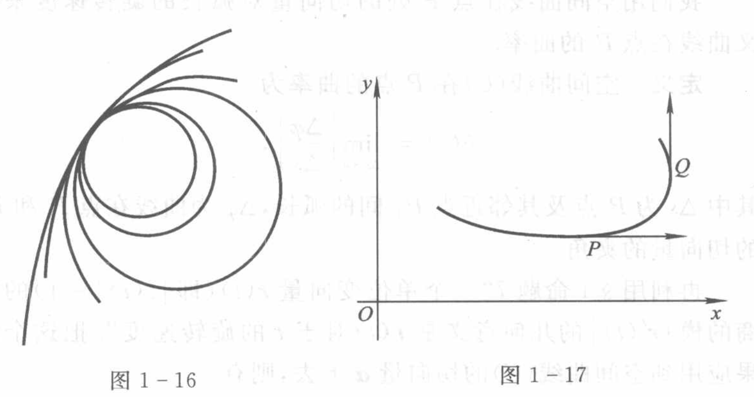


图 1-16　　　　图 1-17

要从直观的基础上引出曲率的确切的定义,我们首先注意到,曲线弯曲的程度越大,则从点到点变动时,其切向量的方向改变得越快. 所以作为曲线在已知一曲线段 PQ 的平均弯曲程度可取为曲线在 P、Q 间切向量关于弧长的平均旋转角.

设空间中 C^3 类曲线(C)的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s).$$

曲线(C)上一点 P,其自然参数为 s,另一邻近点 P_1,其自然参数为 $s+\Delta s$. 在 P、P_1 两点各作曲线(C)的单位切向量$\boldsymbol{\alpha}(s)$和$\boldsymbol{\alpha}(s+\Delta s)$. 两个切向量间的夹角是 $\Delta\varphi$(如图 1-18),也就是把点 P_1 的切向量 $\boldsymbol{\alpha}(s+\Delta s)$平移到点 P 后,两个向量 $\boldsymbol{\alpha}(s)$和 $\boldsymbol{\alpha}(s+\Delta s)$的夹角为 $\Delta\varphi$.

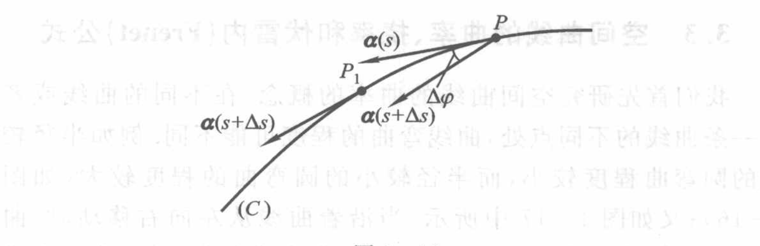


图 1-18

我们用空间曲线在点 P 处的切向量对弧长的旋转速度来定义曲线在点 P 的曲率.

定义 空间曲线(C)在 P 点的曲率为

$$k(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|,$$

其中 Δs 为 P 点及其邻近点 P_1 间的弧长,$\Delta\varphi$ 为曲线在点 P 和 P_1 的切向量的夹角.

再利用§1 命题 7"一个单位变向量 $\boldsymbol{r}(t)$(即$|\boldsymbol{r}(t)|=1$)的微商的模$|\boldsymbol{r}'(t)|$的几何意义是 $\boldsymbol{r}(t)$对于 t 的旋转速度". 把这个结果应用到空间曲线(C)的切向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 上去,则有

$$k(s)=|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|.$$

由于 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}=\ddot{\boldsymbol{r}}$,所以曲率也可表示为

$$k(s)=|\ddot{\boldsymbol{r}}|.$$

由上述空间曲线的曲率的定义可以看出,它的几何意义是曲线的切向量对于弧长的旋转速度. 当曲线在一点的弯曲程度越大,

切向量对于弧长的旋转速度就越大，因此曲率刻画了曲线的弯曲程度.

对于空间曲线，曲线不仅弯曲而且还要扭转(离开密切平面)，所以研究空间曲线只有曲率的概念是不够的，还要有刻画曲线扭转的程度的量——挠率. 当曲线扭转时，副法向量(或密切平面)的位置随着改变(如图 1-19)，所以我们用副法向量(或密切平面)的转动速度来刻画曲线的扭转程度(在一点离开密切平面的程度).

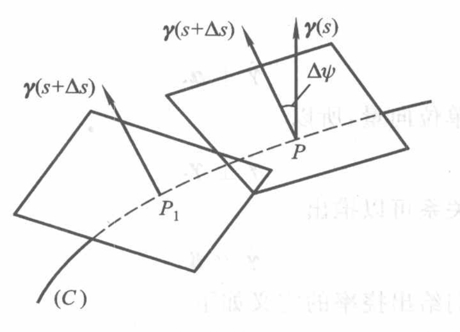


图 1-19

现在设曲线(C)上一点P的自然参数为s，另一邻近点P_1的自然参数为$s+\Delta s$，在P、P_1两点各作曲线(C)的副法向量$\boldsymbol{\gamma}(s)$和$\boldsymbol{\gamma}(s+\Delta s)$. 此两个副法向量的夹角是$\Delta\psi$(如图 1-19).

我们把§1 命题 7 应用到空间曲线(C)的副法向量$\boldsymbol{\gamma}$上去，得到

$$|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\psi}{\Delta s}\right|, \tag{1.16}$$

此式的几何意义是它的数值为曲线的副法向量(或密切平面)对于弧长的旋转速度. 当曲线在一点的扭转程度越大(离开所讨论点的密切平面的程度越大)，副法向量(或密切平面)对于弧长的旋转速度就越大. 因此，我们可以用它来刻画曲线的扭转程度.

根据(1.15)和曲率的定义，我们有

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|}=\frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|}=\frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{k(s)},$$

即

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}=k(s)\boldsymbol{\beta}. \tag{1.17}$$

对 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 求微商，有

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}=(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})^{\cdot}=\dot{\boldsymbol{\alpha}}\times\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}=k(s)\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{\alpha}\times\dot{\boldsymbol{\beta}},$$

因而

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}\perp\boldsymbol{\alpha}.$$

又因为 $\boldsymbol{\gamma}$ 是单位向量，所以

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}\perp\boldsymbol{\gamma}.$$

由以上两个关系可以推出

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}\parallel\boldsymbol{\beta}. \tag{1.18}$$

现在我们给出挠率的定义如下：

定义 曲线 (C) 在 P 点的**挠率**为

$$\tau(s)=\begin{cases}+|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|,\text{当 }\dot{\boldsymbol{\gamma}}\text{ 和 }\boldsymbol{\beta}\text{ 异向},\\-|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|,\text{当 }\dot{\boldsymbol{\gamma}}\text{ 和 }\boldsymbol{\beta}\text{ 同向}.\end{cases}$$

挠率的绝对值是曲线的副法向量（或密切平面）对于弧长的旋转速度.

根据(1.18)及挠率的定义有

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}=-\tau(s)\boldsymbol{\beta}. \tag{1.19}$$

另外，对 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}$ 求微商，并利用(1.19)和(1.17)，可以推导出

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\beta}}&=(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha})^{\cdot}=\dot{\boldsymbol{\gamma}}\times\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}\times\dot{\boldsymbol{\alpha}}\\&=-\tau(s)\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}\times k(s)\boldsymbol{\beta}\\&=-k(s)\boldsymbol{\alpha}+\tau(s)\boldsymbol{\gamma}.\end{aligned} \tag{1.20}$$

公式(1.17)，(1.20)，(1.19)称为空间曲线的**伏雷内(Frenet)公**

式，即

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\alpha}}=k(s)\boldsymbol{\beta},\\ \dot{\boldsymbol{\beta}}=-k(s)\boldsymbol{\alpha}+\tau(s)\boldsymbol{\gamma},\\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}=-\tau(s)\boldsymbol{\beta},\end{cases}\tag{1.21}$$

这组公式是空间曲线论的基本公式. 它的特点是基本向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 关于弧长 s 的微商可以用 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 的线性组合来表示. 它的系数组成反称的方阵

$$\begin{pmatrix}0 & k(s) & 0\\ -k(s) & 0 & \tau(s)\\ 0 & -\tau(s) & 0\end{pmatrix}$$

以下导出曲率和挠率的一般参数表示式.

若给出 C^3 类的空间曲线(C)

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),$$

则有

$$\boldsymbol{r}'=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

$$\boldsymbol{r}''=(\dot{\boldsymbol{r}})'\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2},$$

所以

$$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''=\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\times\left[\ddot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\right]=\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3,$$

由上式得

$$|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|=|\dot{\boldsymbol{r}}||\ddot{\boldsymbol{r}}|\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3\sin\theta.$$

注意上式中

$$|\dot{\boldsymbol{r}}|=1,\dot{\boldsymbol{r}}\perp\ddot{\boldsymbol{r}},\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=|\boldsymbol{r}'|,$$

因而有

$$|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|=k|\boldsymbol{r}'|^3.$$

由此得到曲率的一般参数表示式

$$k=\frac{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}.$$

再由伏雷内公式的(1.19)式

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}=-\tau\boldsymbol{\beta},$$

两边点乘$\boldsymbol{\beta}$得

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}\cdot\boldsymbol{\beta}=-\tau\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta},$$

因而

$$\begin{aligned}\tau&=-\dot{\boldsymbol{\gamma}}\cdot\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\\&=(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\left(\frac{1}{k}\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right)^{\boldsymbol{\cdot}}\\&=\left(\boldsymbol{\alpha}\times\frac{1}{k}\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right)\cdot\left(\left(\frac{1}{k}\right)^{\boldsymbol{\cdot}}\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\frac{1}{k}\ddot{\boldsymbol{\alpha}}\right)\\&=\left(\dot{\boldsymbol{r}}\times\frac{1}{k}\ddot{\boldsymbol{r}}\right)\cdot\left(\left(\frac{1}{k}\right)^{\boldsymbol{\cdot}}\ddot{\boldsymbol{r}}+\frac{1}{k}\dddot{\boldsymbol{r}}\right)\\&=\frac{(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})}{k^2}\\&=\frac{|\boldsymbol{r}'|^6(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})}{(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')^2},\end{aligned}$$

再把

$$\boldsymbol{r}'=\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

$$\boldsymbol{r}''=\ddot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2},$$

$$\boldsymbol{r}'''=\dddot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3+3\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\ddot{\boldsymbol{r}}+\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}^3s}{\mathrm{d}t^3}$$

代入$(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')$中得

$$(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''') = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^6 (\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}}) = |\boldsymbol{r}'|^6 (\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}}),$$

所以得到

$$\tau = \frac{(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')}{(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')^2}.$$

这是一般参数表示的挠率计算公式.

空间曲线(C)在一点的密切圆(曲率圆)是过曲线(C)上一点$P(s)$的主法线的正侧取线段PC,使PC的长为$\frac{1}{k}$.以C为圆心,以$\frac{1}{k}$为半径在密切平面上确定一个圆,这个圆称为曲线(C)在$P(s)$点的**密切圆(曲率圆)**,曲率圆的中心称为**曲率中心**,曲率圆的半径称为**曲率半径**(如图1-20).

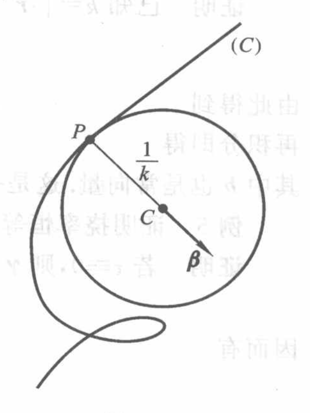


图 1-20

例 3 求圆柱螺线 $\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta\}$ $(-\infty<\theta<+\infty)$的曲率和挠率.

解 由圆柱螺线方程

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta,a\sin\theta,b\theta\},$$

先计算

$$\boldsymbol{r}'=\{-a\sin\theta,a\cos\theta,b\},$$
$$\boldsymbol{r}''=\{-a\cos\theta,-a\sin\theta,0\},$$
$$\boldsymbol{r}'''=\{a\sin\theta,-a\cos\theta,0\},$$

于是有

$$|\boldsymbol{r}'|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ -a\sin\theta & a\cos\theta & b\\ -a\cos\theta & -a\sin\theta & 0\end{vmatrix}=\{ab\sin\theta,-ab\cos\theta,a^2\},$$

$$|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''| = \sqrt{a^2 b^2 + a^4}.$$

代入曲率和挠率的公式得

$$k = \frac{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3} = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

$$\tau = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'')^2} = \frac{ba^2}{a^2 b^2 + a^4} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

由以上可以看出，圆柱螺线的曲率和挠率都是常数.

例 4 证明曲率恒等于零的曲线是直线.

证明 已知 $k = |\ddot{\boldsymbol{r}}| \equiv 0$，因而

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0},$$

由此得到
$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{a}（常向量）.$$

再积分即得
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}s + \boldsymbol{b},$$

其中 $\boldsymbol{b}$ 也是常向量. 这是一条直线的参数方程.

例 5 证明挠率恒等于零的曲线是平面曲线.

证明 若 $\tau \equiv 0$，则 $\boldsymbol{\gamma}$ 是固定向量，但是我们已知

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0,$$

因而有

$$\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0,$$

积分后得

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\gamma} = a（常数）,$$

所以曲线在一个平面上，即曲线是平面曲线.

读者试证上例的逆命题："平面曲线的挠率恒等于零".

我们称挠率不恒为 0 的曲线为**挠曲线**.

3.4 空间曲线在一点邻近的结构

我们在这里研究空间曲线在某一个正常点的邻近的形状.

在 C^3 类曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 上取一点 $\boldsymbol{r}(s_0)$，为了研究点 $\boldsymbol{r}(s_0)$ 邻近

的形状，在它邻近再取一点 $\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)$（如图 1－21）. 利用泰勒公式有

$$\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)=\dot{\boldsymbol{r}}(s_0)\Delta s+\frac{1}{2!}\ddot{\boldsymbol{r}}(s_0)(\Delta s)^2+$$

$$\frac{1}{3!}(\dddot{\boldsymbol{r}}(s_0)+\boldsymbol{\varepsilon})(\Delta s)^3,$$

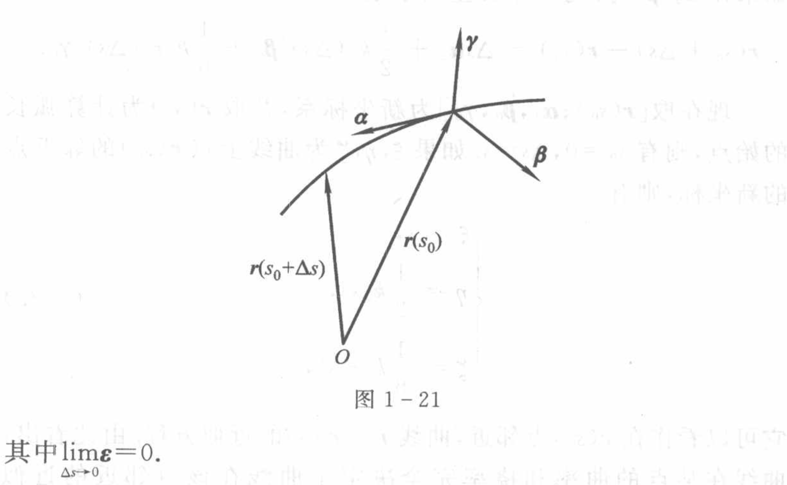


图 1－21

其中 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\boldsymbol{\varepsilon}=0$.

由于

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{\alpha},$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=k\boldsymbol{\beta},$$

$$\dddot{\boldsymbol{r}}=\dot{k}\boldsymbol{\beta}+k\dot{\boldsymbol{\beta}}=\dot{k}\boldsymbol{\beta}+k(-k\boldsymbol{\alpha}+\tau\boldsymbol{\gamma})=-k^2\boldsymbol{\alpha}+\dot{k}\boldsymbol{\beta}+k\tau\boldsymbol{\gamma},$$

所以

$$\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)=\boldsymbol{\alpha}_0\Delta s+\frac{1}{2}k_0\boldsymbol{\beta}_0(\Delta s)^2+$$

$$\frac{1}{6}(-k_0^2\boldsymbol{\alpha}_0+\dot{k}_0\boldsymbol{\beta}_0+k_0\tau_0\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\varepsilon})(\Delta s)^3,$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon_1\boldsymbol{\alpha}_0+\varepsilon_2\boldsymbol{\beta}_0+\varepsilon_3\boldsymbol{\gamma}_0$，而 $\boldsymbol{\alpha}_0$、$\boldsymbol{\beta}_0$、$\boldsymbol{\gamma}_0$、k_0、τ_0 等表示在点 $\boldsymbol{r}(s_0)$ 的值.

由上式可得

$$r(s_0+\Delta s)-r(s_0)=\left[\Delta s+\frac{1}{6}(-k_0^2+\varepsilon_1)(\Delta s)^3\right]\boldsymbol{\alpha}_0+$$

$$\left[\frac{1}{2}k_0(\Delta s)^2+\frac{1}{6}(k_0+\varepsilon_2)(\Delta s)^3\right]\boldsymbol{\beta}_0+\left[\frac{1}{6}(k_0\tau_0+\varepsilon_3)\right](\Delta s)^3\boldsymbol{\gamma}_0.$$

如果在 $\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\beta}_0,\boldsymbol{\gamma}_0$ 每一个分量的系数中只取第一项,则有

$$r(s_0+\Delta s)-r(s_0)=\Delta s\boldsymbol{\alpha}_0+\frac{1}{2}k_0(\Delta s)^2\boldsymbol{\beta}_0+\frac{1}{6}k_0\tau_0(\Delta s)^3\boldsymbol{\gamma}_0.$$

现在取$[r(s_0);\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\beta}_0,\boldsymbol{\gamma}_0]$为新坐标系,并取 $r(s_0)$为计算弧长的始点,则有 $s_0=0,\Delta s=s$. 如果 ξ,η,ζ 为曲线上点 $r(s_0)$的邻近点的新坐标,则有

$$\begin{cases}\xi=s,\\ \eta=\dfrac{1}{2}k_0s^2,\\ \zeta=\dfrac{1}{6}k_0\tau_0s^3,\end{cases}\tag{1.22}$$

它可以看作在 $r(s_0)$点邻近,曲线 $r=\dot{r}(s)$的近似方程. 由此看出,曲线在某点的曲率和挠率完全决定了曲线在该点邻近的近似形状.

下面我们通过曲线(1.22)在基本三棱形的三个平面上的投影来观察曲线在一点邻近的形状.

近似曲线在法平面 $\xi=0$ 上的投影是

$$(\xi=0),\eta=\frac{1}{2}k_0s^2,\zeta=\frac{1}{6}k_0\tau_0s^3$$

消去参数 s 后有

$$(\xi=0),\zeta^2=\frac{2\tau_0^2}{9k_0}\eta^3,$$

它是半立方抛物线(如图 1-22).

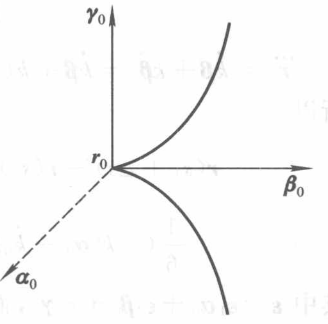


图 1-22

曲线在从切平面 $\eta=0$ 上的投影是

$$(\eta=0),\xi=s,\zeta=\frac{1}{6}k_0\tau_0 s^3,$$

消去参数 s 后,有

$$(\eta=0),\zeta=\frac{1}{6}k_0\tau_0\xi^3,$$

它是立方抛物线(如图 1-23).

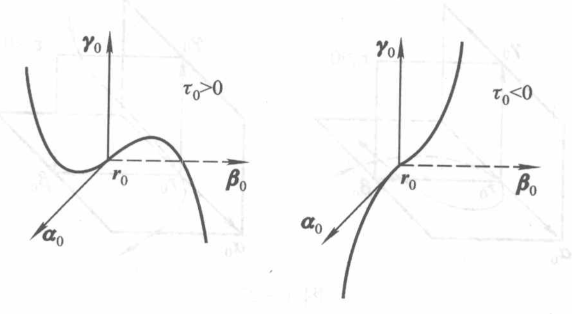


图 1-23

曲线在密切平面 $\zeta=0$ 上的投影是

$$(\zeta=0),\eta=\frac{1}{2}k_0\xi^2,$$

它是抛物线(如图 1-24).

通过画出以上三个投影的立体图形就可以看出空间曲线在一点邻近的近似形状(如图 1-25).

从以上分析可以看出:

1° 曲线穿过法平面和密切平面,但不穿过从切平面.

2° 主法向量 $\boldsymbol{\beta}_0$ 总是指向曲线凹入的方向,这是主法向量正向的几何意义.

3° 挠率的符号对曲线的影响

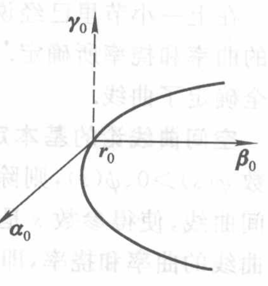


图 1-24

如下：

$\tau_0>0$			
s	ξ	η	ζ
$-$	$-$	$+$	$-$
$+$	$+$	$+$	$+$

$\tau_0<0$			
s	ξ	η	ζ
$-$	$-$	$+$	$+$
$+$	$+$	$+$	$-$

（如图 1－25 左）曲线由下往上成右旋曲线.（如图 1－25 右）曲线由上往下成左旋曲线.

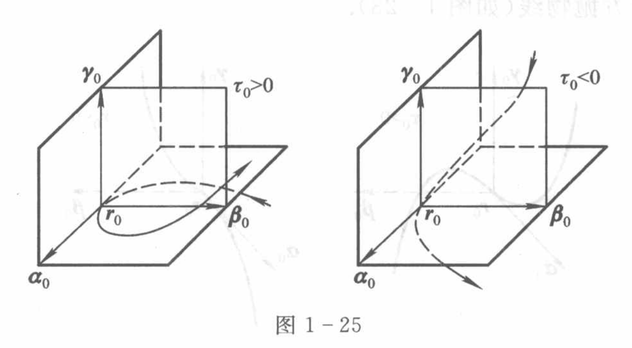


图 1－25

3.5　空间曲线论的基本定理

曲线的每一点都有确定的曲率和挠率，如果以弧长为参数，则有 $k=k(s)$，$\tau=\tau(s)$. 这两个关系式只与曲线本身有关，而与曲线的刚体运动及空间坐标变换无关. 我们把 $k=k(s)$，$\tau=\tau(s)$ 称为空间曲线的**自然方程**.

在上一小节里已经说明了空间曲线的形状局部地大体上由曲线的曲率和挠率所确定. 下面我们将证明，曲线的自然方程局部上完全确定了曲线.

空间曲线论的基本定理　给出闭区间 $[s_0, s_1]$ 上的两个连续函数 $\varphi(s)>0$、$\psi(s)$，则除了空间的位置差别外，惟一地存在一条空间曲线，使得参数 s 是曲线的自然参数，并且 $\varphi(s)$ 和 $\psi(s)$ 分别为曲线的曲率和挠率，即曲线的自然方程为 $k=\varphi(s)$，$\tau=\psi(s)$.

为了确定曲线的位置，设 $s=s_0$ 时，曲线对应空间 P_0 点（即

$\boldsymbol{r}(s_0)=\boldsymbol{r}_0$)，并且在该点的基本向量为给定的两两正交的右手系的单位向量 $\boldsymbol{\alpha}_0$、$\boldsymbol{\beta}_0$、$\boldsymbol{\gamma}_0$.

证明 (i) 以 $\varphi(s)$ 和 $\psi(s)$ 为系数建立一个微分方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{\alpha}, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}=\varphi(s)\boldsymbol{\beta}, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}s}=-\varphi(s)\boldsymbol{\alpha}+\psi(s)\boldsymbol{\gamma}, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s}=-\psi(s)\boldsymbol{\beta}.
\end{cases}
\tag{1.23}
$$

根据微分方程组解的存在定理，此方程组对于初始条件 $s=s_0$ 时 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_0$，$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0$ 有惟一一组解：

$$
\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}(s),\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}(s),
$$

这是以 $\boldsymbol{r}_0$ 为端点的曲线.

(ii) 再作微分方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha})=2\boldsymbol{\alpha}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta})=2\boldsymbol{\beta}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}s}, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma})=2\boldsymbol{\gamma}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s}, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}s}, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma})=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s}, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha})=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s},
\end{cases}
$$

利用(1.23)，则上述微分方程组可成为

$$\begin{cases}\dfrac{d}{ds}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha})=2\varphi(s)\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha},\\ \dfrac{d}{ds}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta})=-2\varphi(s)\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}+2\psi(s)\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma},\\ \dfrac{d}{ds}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma})=-2\psi(s)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\beta},\\ \dfrac{d}{ds}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})=\varphi(s)\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}-\varphi(s)\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\psi(s)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha},\\ \dfrac{d}{ds}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma})=\psi(s)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}-\varphi(s)\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}-\psi(s)\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta},\\ \dfrac{d}{ds}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha})=\varphi(s)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\beta}-\psi(s)\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha},\end{cases}\tag{1.24}$$

由已知条件 $\varphi(s)$，$\psi(s)$ 在 $[s_0,s_1]$ 连续；$s=s_0$ 时 $\boldsymbol{\alpha}_0$、$\boldsymbol{\beta}_0$、$\boldsymbol{\gamma}_0$ 是两两正交的右手系的单位向量，即

$$\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\boldsymbol{\alpha}_0=1,\boldsymbol{\beta}_0\cdot\boldsymbol{\beta}_0=1,\boldsymbol{\gamma}_0\cdot\boldsymbol{\gamma}_0=1,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\boldsymbol{\beta}_0=0,\boldsymbol{\beta}_0\cdot\boldsymbol{\gamma}_0=0,\boldsymbol{\gamma}_0\cdot\boldsymbol{\alpha}_0=0,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_0\times\boldsymbol{\beta}_0\cdot\boldsymbol{\gamma}_0=+1.$$

根据微分方程组解的存在定理，存在惟一的一组解．但是当

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}=1,\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}=1,\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}=1,\\ \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0,\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}=0,\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha}=0\end{gathered}\tag{1.25}$$

时方程组(1.24)被满足，所以它们是(1.24)的一组解．

由上述(1.25)可知 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 是两两正交的单位向量．于是有

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=\pm 1,$$

但是混合积 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$ 是 s 的连续函数，由于当 $s=s_0$ 时它等于 $+1$，所以对于所有的 s 都为 $+1$，即 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 成右手系．

由此得出 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 是两两正交的构成右手系的单位向量．

(iii) 由于已得到 $\boldsymbol{\alpha}(s)$，把(1.23)中的第一个式子两端积分，利用初始条件 $\boldsymbol{r}(s_0)=\boldsymbol{r}_0$ 即得曲线的方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\int_{s_0}^{s}\boldsymbol{\alpha}(s)\,ds.\tag{1.26}$$

(iv) 因为$|\dot{\boldsymbol{r}}|=|\boldsymbol{\alpha}(s)|=1$,所以弧长

$$\sigma=\int_{s_0}^{s}|\dot{\boldsymbol{r}}|\mathrm{d}s=\int_{s_0}^{s}\mathrm{d}s=s-s_0,$$

即$\sigma=s-s_0$. 若取$s_0=0$,则得$\sigma=s$,这就是说s为曲线的自然参数.

(v) 由$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{\alpha}$可知$\boldsymbol{\alpha}(s)$为曲线的切向量. 再由$k=|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|=|\varphi(s)\boldsymbol{\beta}|=\varphi(s)$,可得$\varphi(s)$为曲线的曲率. 由(1.23)中的第二式可知$\boldsymbol{\beta}(s)$是所求曲线的主法向量. 再根据(ii),$\boldsymbol{\gamma}(s)$是曲线的副法向量. 所以$\boldsymbol{\alpha}(s)$,$\boldsymbol{\beta}(s)$,$\boldsymbol{\gamma}(s)$是曲线的基本向量.

(vi) 曲线的挠率为

$$\begin{aligned}
\tau&=\frac{(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})}{k^2}=\frac{(\boldsymbol{\alpha},\varphi(s)\boldsymbol{\beta},\dot{\varphi}(s)\boldsymbol{\beta}+\varphi(s)\dot{\boldsymbol{\beta}})}{k^2}\\
&=\frac{(\boldsymbol{\alpha},\varphi(s)\boldsymbol{\beta},\dot{\varphi}(s)\boldsymbol{\beta}+(-\varphi^2(s)\boldsymbol{\alpha}+\varphi(s)\psi(s)\boldsymbol{\gamma}))}{k^2}\\
&=\frac{\varphi^2(s)\psi(s)(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}{k^2}\\
&=\psi(s).
\end{aligned}$$

由以上可见,由方程(1.26)所确定的曲线是以s为自然参数,$\varphi(s)$为曲率,$\psi(s)$为挠率的曲线.

现在证明惟一性.

设(C_1)和(C_2)是两条曲线,它们在对应点s有相同的曲率$k(s)$和挠率$\tau(s)$,经过适当的刚体运动,可以使曲线(C_1)和(C_2)在对应于自然参数为s_0的点连同在这点的基本三棱形相重合.

我们设$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\gamma}_1$和$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\gamma}_2$为分别对应于曲线(C_1)和(C_2)的基本向量. 两组向量函数$\boldsymbol{\alpha}_1(s)$、$\boldsymbol{\beta}_1(s)$、$\boldsymbol{\gamma}_1(s)$和$\boldsymbol{\alpha}_2(s)$、$\boldsymbol{\beta}_2(s)$、$\boldsymbol{\gamma}_2(s)$都是方程组(1.23)的解,并且这些解具有相同的初始条件. 根据微分方程论的解的存在定理,这两组解是完全相同的. 特别是

$\boldsymbol{\alpha}_1(s)=\boldsymbol{\alpha}_2(s)$ 即 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}s}$，积分后得到

$$\boldsymbol{r}_1(s)=\boldsymbol{r}_2(s)+\boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}\text{ 为常向量}).$$

但是 $\boldsymbol{r}_1(s_0)=\boldsymbol{r}_2(s_0)$，于是有 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以得到

$$\boldsymbol{r}_1(s)=\boldsymbol{r}_2(s).$$

因此，曲线(C_1)与(C_2)重合，这就是说，曲线(C_1)和(C_2)在空间只有位置的差别.

根据上述定理，曲线除了在空间中的位置外，由它的自然方程

$$k=k(s),\tau=\tau(s)$$

惟一地确定.

3.6 一般螺线

空间曲线论的基本定理指出，曲线的曲率和挠率完全决定了曲线的形状. 当曲线的曲率和挠率之间满足多种不同的关系时，就会得到不同类型的曲线. 例如，$k=0$ 时为直线，$\tau=0$ 时为平面曲线. 在这部分我们对常见的曲线——一般螺线进行较为详细的讨论，这对于进一步了解曲线的理论是非常必要的.

我们在 §2 中已介绍过圆柱螺线，它是在一张长方形的纸上画一条斜的直线，当纸卷在圆柱面上时则斜线卷成了圆柱螺线. 如果把同样的纸卷在一个任意的柱面上，那么斜线卷成一般螺线(如图1-26). 从直观上可以看出一般螺线的切线和柱面的母线交于固定角.

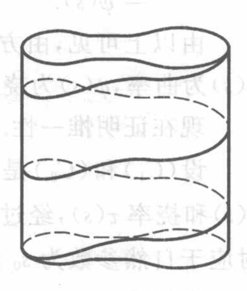


图 1-26

定义 切线和固定方向作固定角的曲线称为**一般螺线**.

一般螺线还有下面几个性质：

1° 主法线与一个固定方向垂直.

证明 设 $\boldsymbol{p}$ 是固定方向上的一个单位向量. 根据一般螺线的

定义，可知它的切向量 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 和 $\boldsymbol{p}$ 作固定角 ω，即

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} = \cos\omega,$$

两边取微商得

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{p} = 0,$$

因此得

$$k\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{p} = 0.$$

由于 $k \neq 0$（我们假定除去直线的情况），可以得到

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{p} = 0.$$

2° 副法线与一个固定方向作固定角.

证明 由 1°知 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 垂直，所以，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}$ 共面. 又因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 垂直，且 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 作固定角，因此得出 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 也作固定角.

3° 曲率和挠率之比为一个定比，即 $\dfrac{k}{\tau} =$ 常数.

证明 由 1°的结论 $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{p} = 0$ 可得

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{p} = 0.$$

因此有

$$(-k\boldsymbol{\alpha} + \tau\boldsymbol{\gamma}) \cdot \boldsymbol{p} = 0,$$

即

$$-k\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + \tau\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{p} = 0.$$

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 的夹角为 ω（定角），所以上式为

$$-k\cos\omega \pm \tau\sin\omega = 0,$$

即

$$\frac{k}{\tau} = \pm\tan\omega\text{（常数）}.$$

可以证明以上 1°、2°、3°的结论不但是必要的，而且也是充分的. 在这里我们只证明 3°的结论是充分的，其余留给读者证明.

如果

$$\frac{k}{\tau} = \text{常数},$$

作向量

$$\boldsymbol{\gamma}+\frac{\tau}{k}\boldsymbol{\alpha}.$$

因为

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}+\frac{\tau}{k}\dot{\boldsymbol{\alpha}}=-\tau\boldsymbol{\beta}+\tau\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0},$$

所以向量 $\boldsymbol{\gamma}+\frac{\tau}{k}\boldsymbol{\alpha}$ 是常向量，并且与 $\boldsymbol{\alpha}$ 作固定角，因此曲线是一般螺线.

以上性质 1°,2°,3°可以看作一般螺线的等价定义.

最后，我们来求一般螺线的一种标准方程.

设柱面的母线平行于 z 轴，则可令 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{e}_3$，再设一般螺线的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),$$

于是由

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}=\cos\omega$$

得到

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}_3=\cos\omega,$$

即

$$\left\{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right\}\cdot\{0,0,1\}=\cos\omega,$$

因而有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=\cos\omega.$$

若令 $z=0$ 时 $s=0$，则

$$z=s\cos\omega.$$

于是一般螺线的方程就成为

$$\boldsymbol{r}=\{x(s),y(s),s\cos\omega\},$$

其中 $x(s)$，$y(s)$为任意函数.

习　题

1. 求圆柱螺线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$ 在任意点的密切平面的方程.

2. 求曲线 $x=t\sin t$，$y=t\cos t$，$z=te^t$ 在原点的密切平面、法平面、从切平面、切线、主法线、副法线方程.

3. 证明圆柱螺线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$ 的主法线和 z 轴垂直相交.

4. 在曲线 $x=\cos\alpha\cos t$，$y=\cos\alpha\sin t$，$z=t\sin\alpha$ 的副法线的正向取单位长，求其端点组成的新曲线的密切平面.

5. 证明球面曲线的法平面通过球的中心.

6. 证明过原点平行于圆柱螺线 $\boldsymbol{r}=\{a\cos t, a\sin t, bt\}$ 的副法线的直线轨迹是锥面 $a^2(x^2+y^2)=b^2z^2$.

7. 求以下曲线的曲率和挠率：

(1) $\boldsymbol{r}=\{a\cosh t, a\sinh t, at\}$；

(2) $\boldsymbol{r}=\{a(3t-t^3), 3at^2, a(3t+t^3)\}$ $(a>0)$.

8. 曲线 $\boldsymbol{r}=\{\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t\}$，求：(1) 基本向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$；(2) 曲率和挠率；(3) 验证伏雷内公式.

9. 证明如果曲线的所有切线都经过一个定点，则此曲线是直线.

10. 证明：如果曲线的所有密切平面都经过一个定点，则此曲线是平面曲线.

11. 证明如果一条曲线的所有法平面包含常向量 $\boldsymbol{e}$，那么这曲线是直线或平面曲线.

12. 证明曲率为常数的空间曲线的曲率中心的轨迹仍是曲率等于常数的曲线.

13. 证明曲线 $x=1+3t+2t^2$，$y=2-2t+5t^2$，$z=1-t^2$ 为平面曲线，并求出它所在的平面方程.

14. 设在两条曲线 Γ、$\bar{\Gamma}$ 的点之间建立了一一对应关系，使它们在对应点的切线平行. 证明它们在对应点的主法线以及副法线也分别平行.

15. 设在两条曲线 Γ、$\bar{\Gamma}$ 的点之间建立了一一对应关系，使它们在对应点的主法线总是互相平行. 证明它们在对应点的切线作成固定角.

16. 若曲线 Γ 的主法线是曲线 $\bar{\Gamma}$ 的副法线，Γ 的曲率、挠率分别为 k、τ，求证 $k=\lambda_0(k^2+\tau^2)$，其中 λ_0 是常数.

17. 曲线 $\boldsymbol{r}=\left\{a(t-\sin t), a(1-\cos t), 4a\cos\dfrac{t}{2}\right\}$ 在哪些点的曲率半径最大？

18. 已知曲线$(C)\in C^3$：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$上一点 $\boldsymbol{r}(s_0)$ 的邻近一点 $\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)$，求 $\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)$点到 $\boldsymbol{r}(s_0)$点的密切平面、法平面的距离（设 $\boldsymbol{r}(s_0)$点的曲率、挠率分别为 k_0，τ_0）.

19. 如果曲线 Γ：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$为一般螺线，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 为 Γ 的切线向量和主法向量，R 为 Γ 的曲率半径，证明 $\bar{\Gamma}$：$\bar{\boldsymbol{r}}(s)=R\boldsymbol{\alpha}-\int\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}s$ 也是一般螺线.

20. 证明一条曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$为一般螺线的充要条件是$(\ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}}, \ddddot{\boldsymbol{r}})=0$.

21. 证明一条曲线的所有切线不可能同时都是另一条曲线的切线.

22. 设在两条曲线(C)、$(\bar{C})$的点之间建立了一一对应关系，使它们在对应点的切线平行. 证明它们在对应点的主法线以及副法线也分别平行，而且它们的挠率和曲率都成比例，因此如果(C)是一般螺线，$(\bar{C})$也是一般螺线.

第二章

曲 面 论

§1 曲面的概念

1.1 简单曲面及其参数表示

平面上不自交的闭曲线称为若尔当(Jordan)曲线．若尔当曲线分平面为两部分，并且每一部分都以此曲线为边界，它们中间一个是有限的，另一个是无限的，其中有限的区域称为**初等区域**．换言之，初等区域是若尔当曲线的内部．例如，正方形或矩形的内部，圆或椭圆的内部等都是初等区域．

如果平面上初等区域到三维欧氏空间内建立的对应是一一的，双方连续的在上映射，则我们把三维欧氏空间中的像称为**简单曲面**．

实例：一矩形纸片(初等区域)，可以卷成带有裂缝的圆柱面，如果矩形纸片是橡皮膜，还可进一步使它变为圆环面．

我们假定以后所讨论的曲面都是简单曲面．不另作声明．

根据上述曲面的概念．我们可以建立曲面的方程．

给出平面上一初等区域 G，G 中的点的笛卡儿坐标是 (u,v)，G 经过上述映射 f 后的像是曲面 S．对于空间的笛卡儿坐标系来说，S 上的点的坐标是 (x,y,z)，这样我们可以具体写出 f 的解析表达式：

$$x = f_1(u,v),\ y = f_2(u,v),$$
$$z = f_3(u,v),\ (u,v) \in G. \tag{2.1}$$

(2.1)称为**曲面 S 的参数表示或参数方程**，u 和 v 称为**曲面 S 的参数或曲纹坐标**.

习惯上，我们常把(2.1)中的函数关系符号 f_1、f_2 和 f_3 分别写成 x、y 和 z，即把(2.1)写成

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),$$
$$z = z(u,v),\ (u,v) \in G. \tag{2.1$'$}$$

我们有时也把曲面的参数方程简写成向量函数的形式：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v),\ (u,v) \in G. \tag{2.2}$$

实例：

(i) 圆柱面：G 是长方形，$u=\theta$，$v=z$，$0<\theta<2\pi$，$-\infty<z<+\infty$（如图 2-1）.

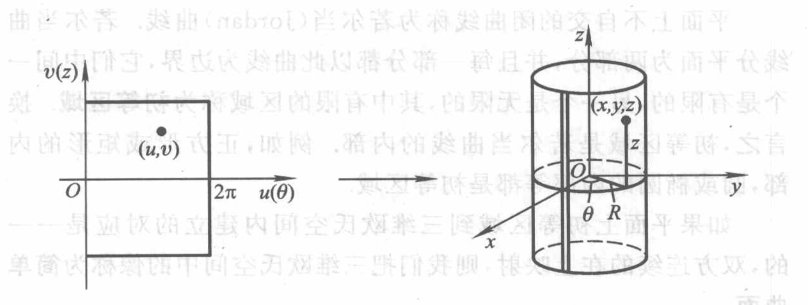


图 2-1

圆柱面的参数方程为

$$x = R\cos\theta,\ y = R\sin\theta,\ z = z,$$

其中 R 为截圆的半径.

(ii) 球面：G 是长方形，$u=\varphi$（经度），$v=\theta$（纬度），$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\varphi<2\pi$（如图 2-2）.

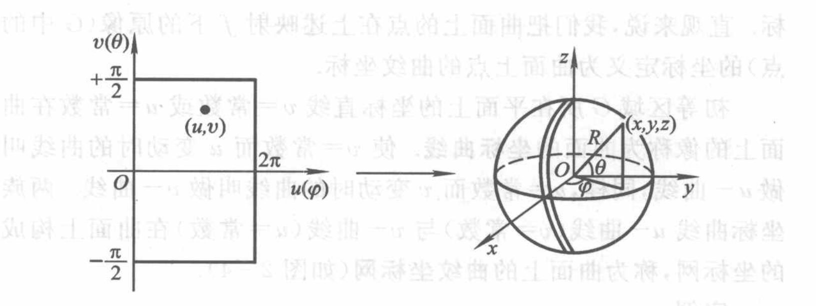


图 2-2

球面的参数方程为

$$x=R\cos\theta\cos\varphi, y=R\cos\theta\sin\varphi, z=R\sin\theta,$$

其中 R 是球面的半径.

(iii) 旋转面：考虑 xOz 平面上的一曲线(C)：

$$x=\varphi(t)>0, z=\psi(t), -\infty<t<+\infty.$$

把此曲线绕 z 轴旋转,则得一曲面,称为**旋转面**. 它的 G 是一长方形,$u=\theta, v=t, 0<\theta<2\pi, -\infty<t<+\infty$(如图 2-3).

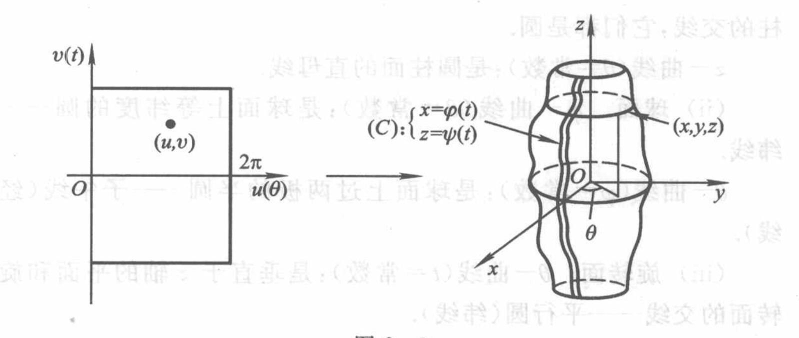


图 2-3

旋转面的参数方程为

$$x=\varphi(t)\cos\theta, y=\varphi(t)\sin\theta, z=\psi(t).$$

上面介绍的(2.1)′或(2.2)中的参数 u, v 就是曲面的曲纹坐

标. 直观来说,我们把曲面上的点在上述映射 f 下的原像(G 中的点)的坐标定义为曲面上点的曲纹坐标.

初等区域 G 所在平面上的坐标直线 $v=$ 常数或 $u=$ 常数在曲面上的像称为曲面的**坐标曲线**. 使 $v=$ 常数而 u 变动时的曲线叫做 u—曲线,同样,$u=$ 常数而 v 变动时的曲线叫做 v—曲线. 两族坐标曲线 u—曲线($v=$ 常数)与 v—曲线($u=$ 常数)在曲面上构成的坐标网,称为曲面上的**曲纹坐标网**(如图 2-4).

实例:

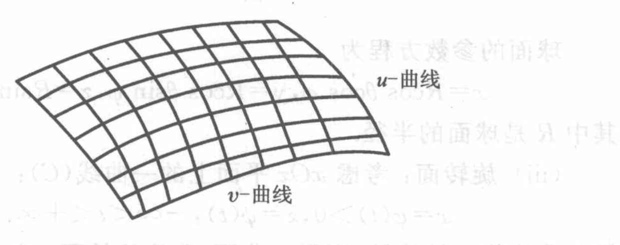


图 2-4

(i) 圆柱面　θ—曲线($z=$ 常数):是垂直于 z 轴的平面和圆柱的交线,它们都是圆.

z—曲线($\theta=$ 常数):是圆柱面的直母线.

(ii) 球面　φ—曲线($\theta=$ 常数):是球面上等纬度的圆——纬线.

θ—曲线($\varphi=$ 常数):是球面上过两极的半圆——子午线(经线).

(iii) 旋转面　θ—曲线($t=$ 常数):是垂直于 z 轴的平面和旋转面的交线——平行圆(纬线).

t—曲线($\theta=$ 常数):是旋转面的母线——子午线(经线).

1.2　光滑曲面　曲面的切平面和法线

如果曲面方程

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v)$$

或

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$$

中的函数有直到 k 阶的连续偏微商，则称为 **k 阶正则曲面或 C^k 类曲面**. 特别地，C^1 类曲面又称为**光滑曲面**. 以后我们假定所讨论的曲面都是光滑的.

过曲面上每一点 (u_0, v_0) 有一条 u—曲线：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v_0),$$

又有一条 v—曲线：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_0,v).$$

在曲面上 (u_0, v_0) 点处的这两条坐标曲线的切向量分别为

$$\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u_0,v_0),\ \boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u_0,v_0),$$

如果它们不平行，即 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 在 (u_0, v_0) 点不等于零，则称 (u_0, v_0) 点为曲面的**正常点**，以后我们只讨论曲面的正常点.

根据 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 的连续性(因为曲面是光滑的)，如果 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 在 (u_0, v_0) 处不为零，则总存在 (u_0, v_0) 的一个邻域 U，使得在此邻域内，$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq\boldsymbol{0}$. 于是，在这片曲面上，有一族 u—曲线和一族 v—曲线：经过曲面上每一点有惟一的一条 u—曲线和惟一的一条 v—曲线，而且这两族曲线彼此不相切. 这样的两族曲线称为曲面上的一个**正规坐标网**.

由于在正常点的邻域 U 内 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq\boldsymbol{0}$，即矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

的秩为 2，换言之，三个行列式

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},\ \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}$$

中总有一个行列式在(u_0,v_0)的邻域U中不为零. 假设第一个行列式不等于零,则由隐函数的存在定理,

$$x=x(u,v),y=y(u,v)$$

在U中存在惟一一对单值的连续可微函数

$$u=u(x,y),v=v(x,y).$$

把上式代入(2.1)$'$中的最后一个方程,则曲面在邻域U上的参数表示可以写成

$$z=z[u(x,y),v(x,y)]=z(x,y),$$

即

$$z=z(x,y). \tag{2.3}$$

(2.3)为曲面特殊的一种参数表示. 于是我们得到

命题 1 曲面在正常点的邻域中总可以有(2.3)形式的参数表示.

若曲面上点的曲纹坐标由下列方程来确定:

$$u=u(t),v=v(t), \tag{2.4}$$

其中t是自变量,把它们代入曲面的参数方程中,则这种点的向径可以用复合函数来表示:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}[u(t),v(t)]=\boldsymbol{r}(t). \tag{2.5}$$

于是$\boldsymbol{r}$可以表示为一个变量t的函数,且当t在某一区间上变动时,$\boldsymbol{r}$的终点在空间中描绘一条曲线. 因此(2.4)或(2.5)在曲面上确定某一曲线,这曲线在曲面上(u_0,v_0)点处的切方向称为曲面在该点的**切方向**或**方向**. 它平行于

$$\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{r}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \tag{2.6}$$

其中$\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$分别是在$(u_0,v_0)$点的两条坐标曲线的切向量.

上式说明$\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$共面,所以有

命题 2 曲面上正常点处的所有切方向都在过该点的坐标曲线的切向量$\boldsymbol{r}_u$和$\boldsymbol{r}_v$所决定的平面上.

我们称此平面为曲面在这一点的**切平面**(如图 2-5).

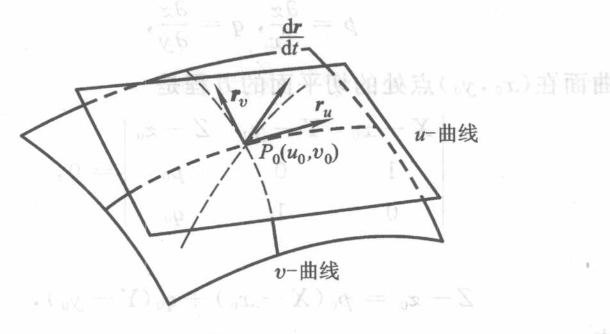


图 2-5

(2.6)还可以简写成

$$r'(t)=\frac{dv}{dt}\left(r_u\frac{du}{dv}+r_v\right),$$

由此可见,$r'(t)$所决定的曲面的切方向,完全依赖于$\frac{du}{dt}$和$\frac{dv}{dt}$的比值 $du:dv$. 因此,以后我们说到给出曲面上某点的一方向时,就是指给出了 $du:dv$.

下面我们导出曲面上一点 $P_0(u_0,v_0)$的切平面的方程. 若设 $R(x,y,z)$表示切平面上的任意点 M 的向径,则根据切平面的定义,向量 $R-r(u_0,v_0)$与向量 $r_u(u_0,v_0)$,$r_v(u_0,v_0)$共面. 由此得出曲面上 $P_0(u_0,v_0)$点的切平面的方程为

$$(R-r(u_0,v_0),r_u(u_0,v_0),r_v(u_0,v_0))=0,$$

或写成坐标的形式

$$\begin{vmatrix} X-x(u_0,v_0) & Y-y(u_0,v_0) & Z-z(u_0,v_0) \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}=0.$$

对于曲面(2.3)形式的参数表示

$$r=\{x,y,z(x,y)\},$$

$$r_x=(1,0,p),\ r_y=(0,1,q),$$

其中

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

则曲面在(x_0,y_0)点处的切平面的方程是

$$\begin{vmatrix} X-x_0 & Y-y_0 & Z-z_0 \\ 1 & 0 & p_0 \\ 0 & 1 & q_0 \end{vmatrix}=0,$$

即

$$Z-z_0=p_0(X-x_0)+q_0(Y-y_0),$$

其中

$$z_0=z(x_0,y_0),\ p_0=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ q_0=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

曲面在正常点处垂直于切平面的方向称为曲面的**法方向**. 过这点平行于法方向的直线称为曲面在该点的**法线**. 显然,曲面的法向量$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$,于是

$$\text{曲面的单位法向量}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}.$$

由于曲面的法线是通过点$P(x,y,z)$,并且平行于法方向的直线,因而它的方程可写为

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+\lambda(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v),$$

其中$\boldsymbol{R}(X,Y,Z)$是法线上的任意一点,λ是决定点$\boldsymbol{R}$在法线上的位置的参数.

用坐标表示的法线方程具有如下的形式:

$$\frac{X-x(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}}=\frac{Y-y(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} z_u(u_0,v_0) & x_u(u_0,v_0) \\ z_v(u_0,v_0) & x_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{Z-z(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}}.$$

对于曲面(2.3)形式的参数表示，法线方程可简化为

$$\frac{X-x_0}{p_0}=\frac{Y-y_0}{q_0}=\frac{Z-z_0}{-1}.$$

例 求圆柱面 $\boldsymbol{r}=\{R\cos\theta,R\sin\theta,z\}$ 在任一点的切平面和法线方程.

解 $\boldsymbol{r}=\{R\cos\theta,R\sin\theta,z\}$,

$\boldsymbol{r}_\theta=\{-R\sin\theta,R\cos\theta,0\}$,

$\boldsymbol{r}_z=\{0,0,1\}$.

在任一点的切平面方程为

$$\begin{vmatrix} X-R\cos\theta & Y-R\sin\theta & Z-z \\ -R\sin\theta & R\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

即

$$X\cos\theta+Y\sin\theta-R=0.$$

在任一点的法线方程为

$$\frac{X-R\cos\theta}{\begin{vmatrix} R\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{Y-R\sin\theta}{\begin{vmatrix} 0 & -R\sin\theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} -R\sin\theta & R\cos\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix}},$$

即

$$\begin{cases} X\sin\theta-Y\cos\theta=0, \\ Z-z=0. \end{cases}$$

如果曲纹坐标 (u,v) 变为新的曲纹坐标 $(\bar{u},\bar{v})$：

$$u=u(\bar{u},\bar{v}),\ v=v(\bar{u},\bar{v}),$$

则得到曲面关于新曲纹坐标 $(\bar{u},\bar{v})$ 的方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\bar{u},\bar{v}).$$

由于新的坐标曲线的切向量 $\boldsymbol{r}_{\bar{u}}$ 和 $\boldsymbol{r}_{\bar{v}}$ 可以用原来的坐标曲线的切向量 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 来表示：

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{\bar{u}}=\boldsymbol{r}_u\dfrac{\partial u}{\partial\bar{u}}+\boldsymbol{r}_v\dfrac{\partial v}{\partial\bar{u}}, \\ \boldsymbol{r}_{\bar{v}}=\boldsymbol{r}_u\dfrac{\partial u}{\partial\bar{v}}+\boldsymbol{r}_v\dfrac{\partial v}{\partial\bar{v}}, \end{cases}$$

因此

$$\overline{\boldsymbol{N}}=\boldsymbol{r}_{\bar{u}}\times\boldsymbol{r}_{\bar{v}}=(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}-\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\right)=\boldsymbol{N}\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}. \tag{2.7}$$

由此可见，假定行列式

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial\bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\\ \frac{\partial u}{\partial\bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial\bar{v}}\end{vmatrix}\neq 0, \tag{2.8}$$

则 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq\boldsymbol{0}$ 对于新的曲纹坐标仍成立.

(2.7)表示当曲纹坐标(u,v)施行变换时，新法向量 $\overline{\boldsymbol{N}}$ 为原来法向量 $\boldsymbol{N}$ 乘上变换行列式(2.8). 因而，可以看出新的法向量 $\overline{\boldsymbol{N}}$ 平行于原来的法向量 $\boldsymbol{N}$. 如果变换行列式(2.8)为正时，$\boldsymbol{N}$ 与 $\overline{\boldsymbol{N}}$ 的方向一致；如果变换行列式(2.8)为负时，$\boldsymbol{N}$ 和 $\overline{\boldsymbol{N}}$ 的方向相反. 现在我们限制参数变换的行列式(2.8)为正，于是对于所有的参数变换法向量的正向保持不变. 在这个限制下，我们称沿法向量 $\boldsymbol{N}$ 的正向为曲面的**正侧**.

由向量积的定义，$\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{r}_v$，$\boldsymbol{N}$ 顺序构成右手系. 我们还要指出的是，曲面正侧的确定与参数的确定有关. 例如，当坐标曲线 u 与 v 对调时，则 $\boldsymbol{N}$ 改变为它的反向，因而曲面正侧变为负侧，这时我们把所讨论的曲面称为双侧曲面.

1.3 曲面上的曲线族和曲线网

给出一光滑曲面 S：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),$$

曲面 S 上一曲线的方程是

$$u=u(t),\ v=v(t), \tag{2.9}$$

或

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}[u(t),v(t)]=\boldsymbol{r}(t). \tag{2.10}$$

从(2.9)消去 t,可以得曲面上曲线方程的其他形式：

$$u=\varphi(v), \tag{2.11}$$

或

$$v=\psi(u), \tag{2.12}$$

或

$$f(u,v)=0. \tag{2.13}$$

线性微分方程

$$A(u,v)\mathrm{d}u+B(u,v)\mathrm{d}v=0 \tag{2.14}$$

表示曲面上一族曲线——曲线族. 设 $A\neq 0$,则由(2.14)得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=-\frac{B(u,v)}{A(u,v)}=F(u,v).$$

解方程得

$$u=\varphi(v,c),$$

其中 c 是待定常数. 每一个 c 值对应曲面上一条曲线,所以上式得到曲面上的一族曲线. (2.14)表示这族曲线的方程.

特别地,$A=0$ 或 $B=0$ 时(2.14)分别为

$$\mathrm{d}v=0 \text{ 或 } \mathrm{d}u=0, \tag{2.15}$$

即

$$v=c_1(\text{常数}),$$

或

$$u=c_2(\text{常数}).$$

因此(2.15)表示坐标曲线的方程.

二阶微分方程

$$A(u,v)\mathrm{d}u^2+2B(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+C(u,v)\mathrm{d}v^2=0 \tag{2.16}$$

(假设$[B(u,v)]^2-A(u,v)C(u,v)>0$)表示曲面上两族曲线——曲线网. 设 $A\neq 0$,由

$$A\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2+2B\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)+C=0,$$

得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\frac{-B(u,v)\pm\sqrt{[B(u,v)]^2-A(u,v)C(u,v)}}{A(u,v)}$$

$$=F_1(u,v)\text{ 或 }F_2(u,v),$$

分别解这两个一阶微分方程，即得曲面上两族曲线．曲面上两族曲线构成曲面上一曲线网，(2.16)表示曲面上曲线网的方程．

特别地，$A=C=0$ 时，(2.16)为

$$\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0. \tag{2.17}$$

若

$$\mathrm{d}u=0,$$

则

$$u=c_1\text{（常数）},$$

这表示 v—曲线族．若

$$\mathrm{d}v=0,$$

则

$$v=c_2\text{（常数）},$$

这表示 u—曲线族．因此(2.17)所表示的曲线网就是曲纹坐标网．

习　题

1．求正螺面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ bv\}$ 的坐标曲线．

2．证明双曲抛物面 $\boldsymbol{r}=\{a(u+v),\ b(u-v),\ 2uv\}$ 的坐标曲线就是它的直母线．

3．求球面 $\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta\cos\varphi,\ a\cos\theta\sin\varphi,\ a\sin\theta\}$ 上任意点的切平面和法线方程．

4．求椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在任意点的切平面方程，并证明沿每一条直母线，此曲面只有一个切平面．

5．证明曲面 $\boldsymbol{r}=\left\{u,v,\frac{a^3}{uv}\right\}$ 的切平面和三个坐标平面所构成的四面体的体积是常数．

§2 曲面的第一基本形式

2.1 曲面的第一基本形式　曲面上曲线的弧长

给出曲面 S：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v) \tag{2.2}$$

上的曲线(C)：

$$u=u(t),\ v=v(t) \tag{2.18}$$

或

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}[u(t),\ v(t)].$$

对于曲线(C)有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{r}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

或者

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}v.$$

若以 s 表示曲面上曲线的弧长，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\boldsymbol{r}^2&=(\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v)^2\\&=\boldsymbol{r}_u^2\mathrm{d}u^2+2\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\boldsymbol{r}_v^2\mathrm{d}v^2.\end{aligned}$$

令

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{F}=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,\ \boldsymbol{G}=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v, \tag{2.19}$$

则有

$$\mathrm{d}s^2=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2. \tag{2.20}$$

这个二次形式可以决定曲面上曲线的弧长. 设曲线(C)上两点 $A(t_0)$，$B(t_1)$，则弧长为

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+2F\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

(2.20)是关于微分 $\mathrm{d}u$，$\mathrm{d}v$ 的一个二次形式，称为曲面 S 的**第一基本形式**. 用Ⅰ表示：

$$\text{I} = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2,$$

它的系数

$$E = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u,\ F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v,\ G = \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v$$

称为曲面 S 的**第一类基本量**.

曲面的第一基本形式在曲面论中占有非常重要的地位.

对于曲面的特殊参数表示 $z=z(x,y)$,有

$$\boldsymbol{r} = \{x, y, z(x,y)\},$$

则

$$\boldsymbol{r}_x = \{1,0,p\},\quad p = \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\boldsymbol{r}_y = \{0,1,q\},\quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

由(2.19)有

$$E = \boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{r}_x = 1 + p^2,\ F = \boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{r}_y = pq,\ G = \boldsymbol{r}_y \cdot \boldsymbol{r}_y = 1 + q^2,$$

曲面的第一基本形式为

$$\text{I} = (1+p^2)\mathrm{d}x^2 + 2pq\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (1+q^2)\mathrm{d}y^2.$$

由(2.19)知

$$E = \boldsymbol{r}_u^2 > 0,\ G = \boldsymbol{r}_v^2 > 0.$$

又根据拉格朗日恒等式可知第一基本形式的判别式

$$EG - F^2 = \boldsymbol{r}_u^2\boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v)^2 = (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)^2 > 0.$$

因此第一类基本量 E、F、G 满足不等式 $E>0, G>0, EG-F^2>0$,这表明第一基本形式是正定的. 这个结论也可由 $\text{I} = \mathrm{d}s^2$ 直接得出.

例 1 求球面 $\boldsymbol{r}=\{R\cos\theta\cos\varphi,\ R\cos\theta\sin\varphi,\ R\sin\theta\}$ 的第一基本形式.

解 由 $\boldsymbol{r}=\{R\cos\theta\cos\varphi,\ R\cos\theta\sin\varphi,\ R\sin\theta\}$,可得出

$$\boldsymbol{r}_\varphi = \{-R\cos\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta\cos\varphi, 0\},$$

$$\boldsymbol{r}_\theta = \{-R\sin\theta\cos\varphi, -R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta\},$$

由此得到曲面的第一类基本量

$$E = \boldsymbol{r}_\varphi \cdot \boldsymbol{r}_\varphi = R^2 \cos^2\theta,$$
$$F = \boldsymbol{r}_\varphi \cdot \boldsymbol{r}_\theta = 0,$$
$$G = \boldsymbol{r}_\theta \cdot \boldsymbol{r}_\theta = R^2.$$

因而

$$\mathrm{I} = R^2\cos^2\theta \mathrm{d}\varphi^2 + R^2 \mathrm{d}\theta^2.$$

例 2 求正螺面(如图 2-6)的第一基本形式.

解 取螺旋轴为 z 轴,以 v 表示直线与 x 轴的交角,以 u 表示直线上的点 M 到 z 轴的距离(如图 2-7),则正螺面的参数方程可写为下列形式:

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = av,$$

上式分别关于 u 和 v 求导得

$$x_u = \cos v, \quad y_u = \sin v, \quad z_u = 0,$$
$$x_v = -u\sin v, \quad y_v = u\cos v, \quad z_v = a.$$

因此

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + a^2,$$
$$\mathrm{I} = \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + (u^2 + a^2)\mathrm{d}v^2.$$

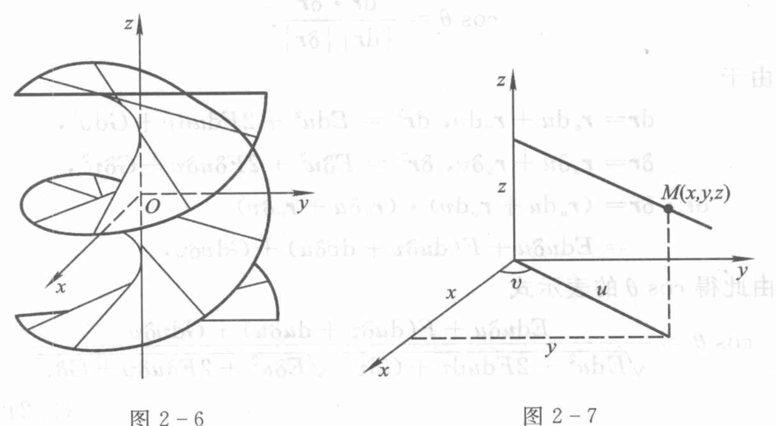


图 2-6　　　　图 2-7

2.2 曲面上两方向的交角

前面已经提到过曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上一点 (u_0,v_0) 的切方向称为曲面上的方向，它能表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)\mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)\mathrm{d}v,$$

其中 $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)$ 和 $\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$ 是过 (u_0,v_0) 点的坐标曲线的切向量．给定了曲面的参数表示式后 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 是已知的，因此给出一方向 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 就等于给出一对值 $\mathrm{d}u$、$\mathrm{d}v$，不过方向和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的长度无关，所以给出 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ 就能确定曲面上的一方向．我们以后经常用(d)，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 或 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ 表示曲面上的一方向．

给出曲面上两个方向 $(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$ 和 $(\delta u:\delta v)$，我们把向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v$ 和 $\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\delta u+\boldsymbol{r}_v\delta v$ 间的交角称为方向 $(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$ 和 $(\delta u:\delta v)$ 间的角．

现在求方向(d)和(δ)间的交角 θ．由于

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r} = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\,|\delta\boldsymbol{r}|\cos\theta,$$

所以

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\,|\delta\boldsymbol{r}|}.$$

由于

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v,\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}^2 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2,\\
\delta\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_u\delta u + \boldsymbol{r}_v\delta v,\ \delta\boldsymbol{r}^2 = E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2,\\
\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r} &= (\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v)\cdot(\boldsymbol{r}_u\delta u + \boldsymbol{r}_v\delta v)\\
&= E\mathrm{d}u\delta u + F(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + G\mathrm{d}v\delta v,
\end{aligned}$$

由此得 $\cos\theta$ 的表示式

$$\cos\theta = \frac{E\mathrm{d}u\delta u + F(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}u\delta u) + G\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2}\ \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}. \tag{2.21}$$

由这个公式可以推出曲面上两个方向 $(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$ 和 $(\delta u:\delta v)$ 垂直的条件是

$$E\mathrm{d}u\delta u + F(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + G\mathrm{d}v\delta v = 0. \tag{2.22}$$

此外我们还可以求出坐标曲线 u—曲线(v=常数)和 v—曲线(u=常数)的交角 ω 的表示式. 因为 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 是坐标曲线的切向量,所以 $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ 间的交角 ω 为

$$\cos\omega = \frac{\boldsymbol{r}_u}{|\boldsymbol{r}_u|}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \tag{2.23}$$

由此推出曲面的坐标网是正交的必要和充分条件是 $F=0$.

例 3 证明旋转面 $\boldsymbol{r}=\{\varphi(t)\cos\theta, \varphi(t)\sin\theta, \psi(t)\}$ 的坐标网是正交的.

证明 $\boldsymbol{r}=\{\varphi(t)\cos\theta, \varphi(t)\sin\theta, \psi(t)\}$,

$\boldsymbol{r}_\theta=\{-\varphi(t)\sin\theta, \varphi(t)\cos\theta, 0\}$,

$\boldsymbol{r}_t=\{\varphi'(t)\cos\theta, \varphi'(t)\sin\theta, \psi'(t)\}$,

由此得到

$$F = \boldsymbol{r}_\theta\cdot\boldsymbol{r}_t = 0,$$

即坐标网是正交的.

同样我们也可以证明圆柱面、球面、正螺面上的坐标网是正交的.

2.3 正交曲线族和正交轨线

给出两族曲线

$$A\mathrm{d}u + B\mathrm{d}v = 0, \quad C\delta u + D\delta v = 0,$$

如果它们正交,由(2.22)可以得出

$$E + F\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} + \frac{\delta v}{\delta u}\right) + G\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\frac{\delta v}{\delta u} = 0, \tag{2.24}$$

即

$$E - F\left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}\right) + G\frac{A}{B}\frac{C}{D} = 0,$$

或

$$EBD - F(AD + BC) + GAC = 0.$$

另外如果给出一族曲线

$$A\mathrm{d}u + B\mathrm{d}v = 0,$$

则另一族和它正交的曲线称为这族曲线的正交轨线.

从(2.24)可以看出正交轨线的微分方程是

$$E + F\left(-\frac{A}{B} + \frac{\delta v}{\delta u}\right) + G\left(-\frac{A}{B}\right)\frac{\delta v}{\delta u} = 0,$$

即

$$\frac{\delta v}{\delta u} = -\frac{BE - AF}{BF - AG}.$$

2.4 曲面域的面积

设曲面 S：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v).$$

给出曲面 S 上一个区域 D,我们将推导其面积的计算公式.

首先把曲面域用坐标曲线 $u=$ 常数与 $v=$ 常数剖分成完整的和不完整的曲边四边形(如图 2-8). u—曲线和 v—曲线越密,那些完整的曲边四边形就越接近平行四边形,而那些不完整的曲边四边形的面积在整个曲面域面积里所占的比重就越小,以至于可以略去.

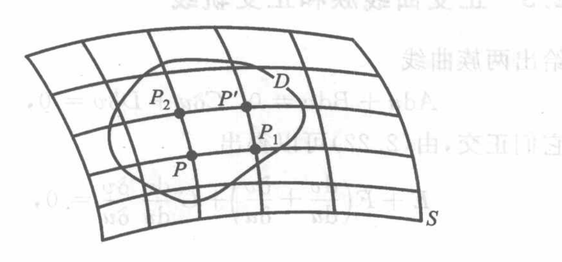


图 2-8

取以点(u,v), $(u+\mathrm{d}u,v)$, $(u+\mathrm{d}u, v+\mathrm{d}v)$, $(u,v+\mathrm{d}v)$为顶点的曲边四边形,可以近似地把它换成切平面上的一个平行四边形. 这个平行四边形以切于坐标曲线的向量 $\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u$ 与 $\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v$ 为边(如

图 2－9）．我们把所取的曲边四边形的面积可以认为近似地等于以 $\boldsymbol{r}_u \mathrm{d}u$，$\boldsymbol{r}_v \mathrm{d}v$ 为边的平行四边形的面积．

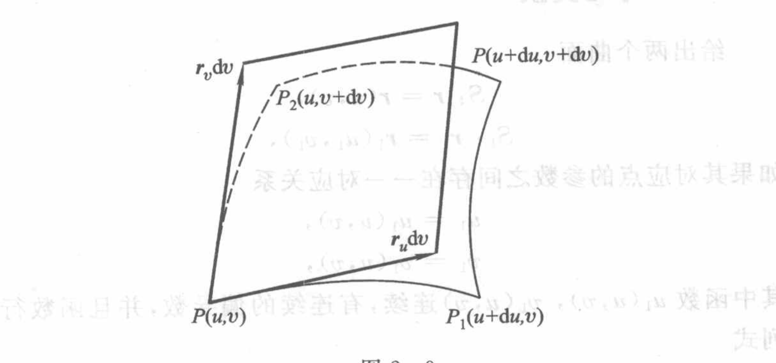


图 2－9

由于平行四边形的面积等于两边之积再乘以它们交角的正弦．于是，上述的平行四边形的面积 $\mathrm{d}\sigma$ 为

$$\mathrm{d}\sigma = |\boldsymbol{r}_u \mathrm{d}u \times \boldsymbol{r}_v \mathrm{d}v| = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

因此，曲面域 D 的面积 σ 可由二重积分来表示：

$$\sigma \text{ 的面积} = \iint_D \mathrm{d}\sigma = \iint_{\mathscr{D}} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v, \tag{2.25}$$

这里的区域 $\mathscr{D}$ 是曲面域 D 相对应的 (u,v) 平面上的区域．由于

$$(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)^2 = \boldsymbol{r}_u^2 \boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v)^2 = EG - F^2 > 0,$$

所以①

$$\sigma \text{ 的面积} = \iint_{\mathscr{D}} \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v. \tag{2.26}$$

这样，我们看到曲面上曲线的弧长、曲面上两方向的交角以及曲面域的面积都可以用第一类基本量 E、F、G 来表示．仅由第一基本形式出发所能建立的几何性质称为曲面的**内在性质**或**内蕴性**

① 我们这里只是直观地推导了曲面的面积公式．关于曲面面积概念的严格叙述与曲面面积公式的严格推导，详见 C. Goffman 著《多元微积分》（史济怀，彭家贵等译，人民教育出版社出版，1979）第四章第 7 节．

质. 以上这些度量性质都是曲面的内蕴性质.

2.5 等距变换

给出两个曲面

$$S: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),$$
$$S_1: \boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1(u_1,v_1),$$

如果其对应点的参数之间存在一一对应关系

$$u_1=u_1(u,v),$$
$$v_1=v_1(u,v),$$

其中函数 $u_1(u,v)$, $v_1(u,v)$ 连续,有连续的偏导数,并且函数行列式

$$\frac{\partial(u_1,v_1)}{\partial(u,v)}\neq 0,$$

则 S 和 S_1 之间的一一对应关系称为 S 到 S_1 的**变换**.

因此,如果 S 和 S_1 之间有符合上述条件的对应关系,则在 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1(u_1,v_1)$ 上就可以经过参数变换

$$u_1=u_1(u,v),$$
$$v_1=v_1(u,v),$$

使

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1[u_1(u,v),\ v_1(u,v)]=\boldsymbol{r}_1(u,v),$$

即 S_1 也以 u, v 为参数.

这样,曲面 S 和 S_1 的对应点就有相同的参数. 因而在以下讨论变换时,如无特别声明,总假定对应点有相同的参数.

在取定相同的参数时,曲面 S 上的点 (u,v) 对应曲面 S_1 上的点 (u,v) (即 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 对应 $\boldsymbol{r}_1(u,v)$). 曲面 S 上的曲线 $u=u(t)$, $v=v(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$ 对应曲面 S_1 上的曲线 $u=u(t)$, $v=v(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$ (即 $\boldsymbol{r}[u(t),\ v(t)]$ 对应 $\boldsymbol{r}_1[u(t),v(t)]$),也就是对应曲线有相同的方程. 曲面 S,S_1 的第一基本形式分别为

$$\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2,$$

$$\mathrm{I}_1 = E_1 \mathrm{d}u^2 + 2F_1 \mathrm{d}u\mathrm{d}v + G_1 \mathrm{d}v^2,$$

其中 $E = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u,\ F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v,\ G = \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v,$

$$E_1 = \boldsymbol{r}_{1u} \cdot \boldsymbol{r}_{1u},\ F_1 = \boldsymbol{r}_{1u} \cdot \boldsymbol{r}_{1v},\ G_1 = \boldsymbol{r}_{1v} \cdot \boldsymbol{r}_{1v}.$$

定义 曲面之间的一个变换,如果它保持曲面上任意曲线的长度不变,则这个变换称为**等距变换(保长变换)**.

由于曲面上曲线的长度是由曲线的参数方程和曲面的第一基本形式所确定,而上面所述对应的曲线又有相同的参数方程,所以如果对应曲面的第一基本形式相同:

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_1,$$

也即

$$E(u,v) = E_1(u,v),\ F(u,v) = F_1(u,v),$$
$$G(u,v) = G_1(u,v),$$

则曲面 S 和 S_1 之间的变换就是等距变换.

定理 两个曲面之间的一个变换是等距的充要条件是经过适当选择参数后,它们具有相同的第一基本形式.

证明 充分性已证,以下证明必要性.

设曲面 S 与 S_1 之间的一个变换是等距的,且对应点取相同的参数,则 S 上的任意一条曲线 $\boldsymbol{r}[u(t),\ v(t)]$和 S_1 上的对应曲线 $\boldsymbol{r}_1[u(t),\ v(t)]$有相同的长度,即对于$[t_0, t_1]$的任意 t 有

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2F\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) + G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{t_0}^{t} \sqrt{E_1\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2F_1\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) + G_1\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t,$$

因此

$$E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2 = E_1\mathrm{d}u^2 + 2F_1\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G_1\mathrm{d}v^2$$

对曲面 S, S_1 上的任意对应曲线都成立.

由于在曲面上任一点沿任意方向都有曲线,所以上述等式对任一点和任意方向($\mathrm{d}u : \mathrm{d}v$)是恒等式,于是,

$$E = E_1,\ F = F_1,\ G = G_1$$

对于对应曲面上任意一对对应点都成立.

根据这个定理我们知道,仅由第一基本形式所确定的曲面的性质(即内蕴性质)在等距变换下保持不变. 因此,我们在上一节中所学过的曲面上曲线的弧长、交角、曲面域的面积等都是等距不变量(保长不变量). 今后我们把曲面上这种仅仅用 E、F、G 表示出来的几何量称为曲面的**内蕴量**.

例 4 正螺面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ av\}$ 的第一基本形式是

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + (u^2 + a^2)\mathrm{d}v^2,$$

而悬链面 $\boldsymbol{r}=\left\{a\cosh\dfrac{t}{a}\cos\theta,\ a\cosh\dfrac{t}{a}\sin\theta, t\right\}$,有

$$\boldsymbol{r}_t = \left\{\sinh\frac{t}{a}\cos\theta,\ \sinh\frac{t}{a}\sin\theta, 1\right\},$$

$$\boldsymbol{r}_\theta = \left\{-a\cosh\frac{t}{a}\sin\theta,\ a\cosh\frac{t}{a}\cos\theta, 0\right\},$$

$$E = \sinh^2\frac{t}{a} + 1 = \cosh^2\frac{t}{a},\ F = 0,\ G = a^2\cosh^2\frac{t}{a},$$

所以悬链面的第一基本形式为

$$\mathrm{I} = \cosh^2\frac{t}{a}(\mathrm{d}t^2 + a^2\mathrm{d}\theta^2).$$

如果令

$$\begin{cases} u = a\sinh\dfrac{t}{a}, \\ v = \theta, \end{cases}$$

则

$$u^2 + a^2 = a^2\cosh^2\frac{t}{a},$$

$$\mathrm{d}u = \cosh\frac{t}{a}\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}\theta,$$

代入悬链面的第一基本形式得

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + (u^2 + a^2)\mathrm{d}v^2.$$

这与正螺面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ av\}$ 的第一基本形式一致. 这就

是说，上述参数之间的对应关系，给出悬链面和正螺面之间的一个等距变换.

2.6 保角变换

定义 曲面之间的一个变换，如果使曲面上对应曲线的交角相等，则这个变换称为**保角变换**(**保形变换**).

在下面的讨论中，我们仍假定两个曲面的对应点有相同的参数.

定理 两个曲面之间的一个变换是保角变换的充要条件是它们的第一基本形式成比例.

也就是说如果取相同参数时，两个曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I} = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2,$$

$$\mathrm{I}_1 = E_1\mathrm{d}u^2 + 2F_1\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G_1\mathrm{d}v^2$$

由此可知

$$\mathrm{I}_1 = \lambda^2(u,v)\,\mathrm{I},\ \lambda(u,v) \neq 0,$$

即第一类基本量成比例：

$$E_1 : E = F_1 : F = G_1 : G.$$

证明 充分性：由

$$E_1 = \lambda^2 E,\ F_1 = \lambda^2 F,\ G_1 = \lambda^2 G$$

代入曲面上曲线的交角公式(2.21)，得知对应曲面上曲线间的交角相等.

必要性：由于保角变换，因此对于两曲线的正交性是保持不变的，所以从公式(2.22)：

$$E\mathrm{d}u\delta u + F(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + G\mathrm{d}v\delta v = 0,$$

得到

$$E_1\mathrm{d}u\delta u + F_1(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + G_1\mathrm{d}v\delta v = 0.$$

消去 δu、δv，便得

$$\frac{E\mathrm{d}u + F\mathrm{d}v}{E_1\mathrm{d}u + F_1\mathrm{d}v} = \frac{F\mathrm{d}u + G\mathrm{d}v}{F_1\mathrm{d}u + G_1\mathrm{d}v}.$$

由于 du 和 dv 的任意性，在 $dv=0$ 时得到

$$\frac{E}{E_1}=\frac{F}{F_1},$$

而在 $du=0$ 时得到

$$\frac{F}{F_1}=\frac{G}{G_1},$$

所以

$$E_1:E=F_1:F=G_1:G.$$

显然，每一个等距变换都是保角变换，但保角变换一般不是等距变换.

例 5 球极投影给出球面（除北极外）到平面的一个变换（如图 2－10）. 如果取如图所示的一个空间直角坐标系和参数 u,v，则对应点 P 和 P_1 的坐标，也就是球面和平面的参数表示分别为

$$\begin{cases}x=2R\sin u\cos u\cos v,\\ y=2R\sin u\cos u\sin v,\\ z=2R\sin^2 u\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}x=2R\tan u\cos v,\\ y=2R\tan u\sin v,\\ z=0,\end{cases}$$

其中 R 是球面的半径，于是它们的第一基本形式分别为

$$\mathrm{I}=4R^2(du^2+\sin^2 u\cos^2 u\,dv^2)$$

和

$$\mathrm{I}_1=\frac{4R^2}{\cos^4 u}(du^2+\sin^2 u\cos^2 u\,dv^2),$$

即在球极投影下 I 与 I_1 成比例，所以球极投影是球面到平面的一个保角变换.

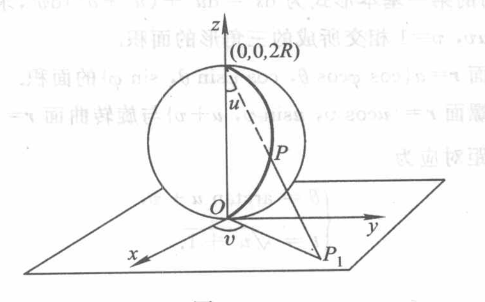


图 2－10



习　　题

1. 求双曲抛物面 $\boldsymbol{r}=\{a(u+v),\ b(u-v),\ 2uv\}$ 的第一基本形式.

2. 求正螺面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ bv\}$ 的第一基本形式，并证明坐标曲线互相垂直.

3. 在第一基本形式为

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+\sinh^2 u\mathrm{d}v^2$$

的曲面上，求方程为 $u=v$ 的曲线的弧长.

4. 设一个曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+(u^2+a^2)\mathrm{d}v^2,$$

求它上面两条曲线 $u+v=0$，$u-v=0$ 的交角(注意，解此题时，不需要知道曲面和曲线的形状).

5. 求曲面 $z=axy$ 上坐标曲线 $x=x_0$，$y=y_0$ 的交角.

6. 求 u—曲线和 v—曲线的正交轨线的微分方程.

7. 在曲面上一点，含 $\mathrm{d}u$，$\mathrm{d}v$ 的二次方程

$$P\mathrm{d}u^2+2Q\mathrm{d}u\mathrm{d}v+R\mathrm{d}v^2=0$$

确定两个切方向 $(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$ 和 $(\delta u:\delta v)$，证明这两个方向互相垂直的充要条件是

$$ER-2FQ+GP=0.$$

8. 证明曲面的坐标曲线的二等分角轨线的微分方程为

$$E\mathrm{d}u^2=G\mathrm{d}v^2.$$

9. 设曲面的第一基本形式为 $ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2$，求出曲面上由三条曲线 $u=\pm av$, $v=1$ 相交所成的三角形的面积.

10. 求球面 $\boldsymbol{r}=a\{\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\}$的面积.

11. 证明螺面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, u+v\}$与旋转曲面 $\boldsymbol{r}=\{t\cos\theta, t\sin\theta, \sqrt{t^2-1}\}$的等距对应为

$$\begin{cases}\theta=\arctan u+v,\\ t=\sqrt{u^2+1}.\end{cases}$$

§3 曲面的第二基本形式

3.1 曲面的第二基本形式

在§2中所研究的对象都是属于曲面的内蕴几何，即所研究的只是曲面本身的内蕴性质，而不依赖于曲面在空间中如何弯曲. 为了研究曲面在空间中的弯曲性，我们有必要引进 du 和 dv 的另一个二次微分形式，就是我们在这里要介绍的第二基本形式.

设 C^2 类曲面 S 的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),$$

即 $\boldsymbol{r}(u,v)$有连续的二阶导函数 $\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_{vv}$.

现在固定曲面 S 上一点 $P(u,v)$，并设 π 为曲面在 P 点的切平面.

曲线(C)：

$$u=u(s),\ v=v(s) \text{ 或 } \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}[u(s), v(s)]$$

是 S 上过 P 点的一曲线，其中 s 是自然参数. 设 P'是曲线(C)上在 P 点邻近的一点，P 和 P'点的自然参数的值分别为 s 与 $s+\Delta s$，即 P 点的向径为 $\boldsymbol{r}(s)$，P'点的向径为 $\boldsymbol{r}(s+\Delta s)$. 利用泰勒公式得

$$\overrightarrow{PP'}=\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)=\dot{\boldsymbol{r}}\Delta s+\frac{1}{2}(\ddot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{\varepsilon})(\Delta s)^2,$$

其中$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{0}$.

设 $\boldsymbol{n}$ 为曲面在 P 点的单位法向量，由 P' 作切平面 π 的垂线，垂足为 Q，则$\overrightarrow{QP'}=\delta\boldsymbol{n}$，其中 δ 为从平面 π 到曲面 S 的有向距离（如图 2－11）.

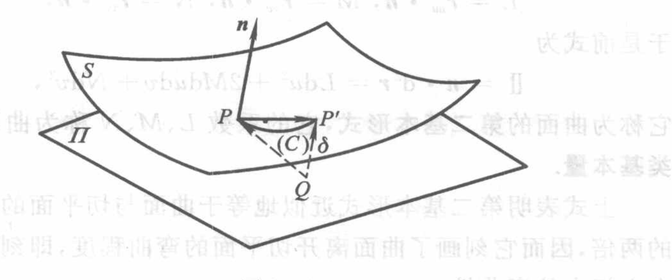


图 2－11

由于

$$\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\ \boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=0,$$

所以有

$$\begin{aligned}\delta&=\overrightarrow{QP'}\cdot\boldsymbol{n}\\&=(\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PP'})\cdot\boldsymbol{n}\\&=\overrightarrow{PP'}\cdot\boldsymbol{n}\\&=[\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)]\cdot\boldsymbol{n}\\&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\varepsilon})(\Delta s)^2.\end{aligned}$$

因此当 $\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}\neq0$ 时，无穷小距离 δ 的主要部分是

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}(\Delta s)^2=\frac{1}{2}\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}s^2,$$

由于

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}_u\dot{u}+\boldsymbol{r}_v\dot{v},$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}_{uu}\dot{u}^2+2\boldsymbol{r}_{uv}\dot{u}\dot{v}+\boldsymbol{r}_{vv}\dot{v}^2+\boldsymbol{r}_u\ddot{u}+\boldsymbol{r}_v\ddot{v},$$

又因为

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_v=0,$$

所以

$$\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}s^2=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu}\mathrm{d}u^2+2\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}\mathrm{d}v^2.$$

引进符号：

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n},\ M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n},\ N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n},\tag{2.27}$$

于是前式为

$$\mathrm{II}=\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}=L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2,\tag{2.28}$$

它称为曲面的**第二基本形式**，它的系数 L、M、N 称为曲面的**第二类基本量**.

上式表明第二基本形式近似地等于曲面与切平面的有向距离的两倍，因而它刻画了曲面离开切平面的弯曲程度，即刻画了曲面在空间中的弯曲性.

根据上述讨论，我们可以看出第二基本形式不一定是正定的，当曲面在给定点向 $\boldsymbol{n}$ 的正侧弯曲时为正，向 $\boldsymbol{n}$ 的反侧弯曲时为负.

现在把曲面的单位法向量

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}$$

代入(2.27)中，就有

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{(\boldsymbol{r}_{uu},\ \boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{(\boldsymbol{r}_{uv},\ \boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{(\boldsymbol{r}_{vv},\ \boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

另一方面，对关系式 $\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$ 进行微分，便得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}=0,$$

由此得出

$$\mathrm{II}=\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}=-\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

第二类基本量还可以用另外的形式来表示. 由于 $\boldsymbol{r}_u$、$\boldsymbol{r}_v$ 在切平面上，所以

$$\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n} = 0,\ \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{n} = 0,$$

将上两式微分后得

$$\boldsymbol{r}_{uu} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n}_u = 0,\ \boldsymbol{r}_{vu} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{n}_u = 0,$$

$$\boldsymbol{r}_{uv} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n}_v = 0,\ \boldsymbol{r}_{vv} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{n}_v = 0.$$

与(2.27)比较，我们得到

$$L = \boldsymbol{r}_{uu} \cdot \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n}_u,$$

$$M = \boldsymbol{r}_{uv} \cdot \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n}_v = -\boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{n}_u,$$

$$N = \boldsymbol{r}_{vv} \cdot \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{n}_v.$$

例 1 计算球面 $\boldsymbol{r}=(R\cos\theta\cos\varphi,\ R\cos\theta\sin\varphi,\ R\sin\theta)$ 的第二基本形式.

解 $\boldsymbol{r}=\{R\cos\theta\cos\varphi,\ R\cos\theta\sin\varphi,\ R\sin\theta\}$,

$\boldsymbol{r}_\varphi=\{-R\cos\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta\cos\varphi, 0\}$,

$\boldsymbol{r}_\theta=\{-R\sin\theta\cos\varphi,\ -R\sin\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta\}$,

由此得到

$$E = \boldsymbol{r}_\varphi \cdot \boldsymbol{r}_\varphi = R^2\cos^2\theta,\ F = \boldsymbol{r}_\varphi \cdot \boldsymbol{r}_\theta = 0,\ G = \boldsymbol{r}_\theta \cdot \boldsymbol{r}_\theta = R^2,$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_\varphi \times \boldsymbol{r}_\theta}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$= \frac{1}{R^2\cos\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ -R\cos\theta\sin\varphi & R\cos\theta\cos\varphi & 0 \\ -R\sin\theta\cos\varphi & -R\sin\theta\sin\varphi & R\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \{\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\},$$

又由于

$$\boldsymbol{r}_{\varphi\varphi} = \{-R\cos\theta\cos\varphi,\ -R\cos\theta\sin\varphi, 0\},$$

$$\boldsymbol{r}_{\varphi\theta} = \{R\sin\theta\sin\varphi,\ -R\sin\theta\cos\varphi, 0\},$$

$$\boldsymbol{r}_{\theta\theta} = \{-R\cos\theta\cos\varphi,\ -R\cos\theta\sin\varphi,\ -R\sin\theta\},$$

所以

$$L = \boldsymbol{r}_{\varphi\varphi} \cdot \boldsymbol{n} = -R\cos^2\theta,\ M = \boldsymbol{r}_{\varphi\theta} \cdot \boldsymbol{n} = 0,\ N = \boldsymbol{r}_{\theta\theta} \cdot \boldsymbol{n} = -R,$$

因而得到

$$\mathrm{II} = -(R\cos^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2 + R\mathrm{d}\theta^2).$$

对于曲面的特殊的参数表示 $z=z(x,y)$,有

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z(x,y)),$$
$$\boldsymbol{r}_x=(1,0,p),$$
$$\boldsymbol{r}_y=(0,1,q),$$
$$\boldsymbol{r}_{xx}=(0,0,r),$$
$$\boldsymbol{r}_{xy}=(0,0,s),$$
$$\boldsymbol{r}_{yy}=(0,0,t),$$

其中

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

第一类基本量为

$$E=\boldsymbol{r}_x\cdot\boldsymbol{r}_x=1+p^2,\ F=\boldsymbol{r}_x\cdot\boldsymbol{r}_y=pq,\ G=\boldsymbol{r}_y\cdot\boldsymbol{r}_y=1+q^2.$$

第一基本形式为

$$\mathrm{I}=(1+p^2)\mathrm{d}x^2+2pq\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(1+q^2)\mathrm{d}y^2.$$

由于

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_y}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{\{-p,-q,1\}}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

由此得出第二类基本量为

$$L=\boldsymbol{r}_{xx}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$M=\boldsymbol{r}_{xy}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$N=\boldsymbol{r}_{yy}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

第二基本形式为

$$\mathrm{II}=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\mathrm{d}x^2+2\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+$$

$$\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\mathrm{d}y^2.$$

例 2 计算抛物面 $z=a(x^2+y^2)$ 的第一基本形式和第二基本形式.

解 先计算

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=2ax,\ q=\frac{\partial z}{\partial y}=2ay,$$

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2a,\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2a,$$

再计算

$$E=1+p^2=1+4a^2x^2,\ F=pq=4a^2xy,$$
$$G=1+q^2=1+4a^2y^2,$$

$$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{2a}{\sqrt{1+4a^2x^2+4a^2y^2}},$$

$$M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0,$$

$$N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{2a}{\sqrt{1+4a^2x^2+4a^2y^2}},$$

由此得到

$$\mathrm{I}=(1+4a^2x^2)\mathrm{d}x^2+8a^2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(1+4a^2y^2)\mathrm{d}y^2,$$

$$\mathrm{II}=\frac{2a}{\sqrt{1+4a^2x^2+4a^2y^2}}\mathrm{d}x^2+\frac{2a}{\sqrt{1+4a^2x^2+4a^2y^2}}\mathrm{d}y^2.$$

3.2 曲面上曲线的曲率

由以上的讨论我们已经了解到曲面在已知点邻近的弯曲性可以由曲面离开它的切平面的快慢来决定. 但是曲面在不同的方向弯曲的程度不同,也就是说在不同的方向曲面以不同的速度离开切平面. 因此,当我们想刻画曲面在已知点邻近的弯曲性时,就需要用曲面上过该点的不同的曲线的曲率来进行研究.

给出 C^2 类曲面 S：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),$$

过曲面 S 上点 $P(u,v)$ 的任一曲线(C)为：

$$u=u(s),\ v=v(s)$$

或

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}[u(s),\ v(s)]=\boldsymbol{r}(s),$$

其中 s 是自然参数.

我们仍用以前的符号，以 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 分别表示曲线(C)的切向量和主法向量. 根据伏雷内公式有

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{\alpha}}=k\boldsymbol{\beta},$$

其中 k 是曲线(C)在 P 点的曲率.

若以 θ 表示曲线(C)的主法向量 $\boldsymbol{\beta}$ 和曲面法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角（如图 2－12)，则

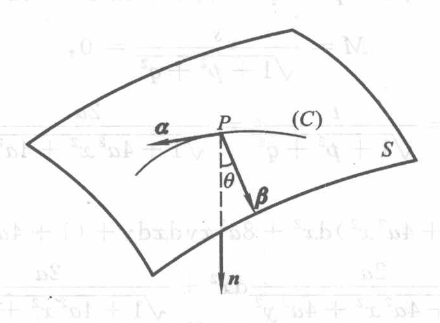


图 2－12

$$\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{n}=k\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}=k\cos\theta.$$

另一方面，由于

$$\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{n}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}},$$

因此

$$k\cos\theta=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}. \tag{2.29}$$

上式中的右端依赖于第一、第二类基本量和$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$. 由于$E$、$F$、$G$、$L$、$M$、$N$都是参数$(u,v)$的函数,它们在曲面上一个给定点$P$都具有确定的值,$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$是曲线在该点的切方向,所以对曲面上一个给定点及曲面曲线在该点的切方向,上式右端都有确定的值. 因此若在曲面上一个给定点相切的两条曲面曲线,在该点它们的主法线有相同的方向,则它们的角度θ也相同,所以根据(2.29),k也相同.

如果在曲面的任何曲线(C)上一点P,作通过(C)在P点的切线与主法线的平面(即密切平面),得到这个平面与曲面的截线. 这条平面曲线与曲线(C)具有相同的切线与主法线,所以曲率也相同. 这样,对于曲面曲线的曲率的研究可以转化为对于这曲面上一条平面截线的曲率的讨论. 根据这样的分析,以下我们引入曲面上特殊的平面截线.

给出曲面S上一点P和P点处一方向$(d)=\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$,设$\boldsymbol{n}$为曲面在$P$点的法方向,于是$(d)$和$\boldsymbol{n}$所确定的平面称为曲面在$P$点的沿方向$(d)$的**法截面**,这法截面和曲面$S$的交线称为曲面在$P$点的沿方向$(d)$的**法截线**.

设方向$(d)=\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$所确定的法截线$(C_0)$在$P$点的曲率为$k_0$. 对于法截线$(C_0)$,主法向量$\boldsymbol{\beta}_0=\pm\boldsymbol{n}$, $\theta_0=0$或π,所以由(2.29)知它的曲率$k_0\geqslant 0$为

$$\pm k_0=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}},$$

即

$$k_0=\pm\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}, \tag{2.30}$$

其中$\boldsymbol{n}$和(C_0)的主法向量$\boldsymbol{\beta}_0$的方向相同时取正号,反之取负号(如图2-13),即法截线向$\boldsymbol{n}$的正侧弯曲时取正号;反之,向$\boldsymbol{n}$的反侧弯曲时取负号(如图2-13).

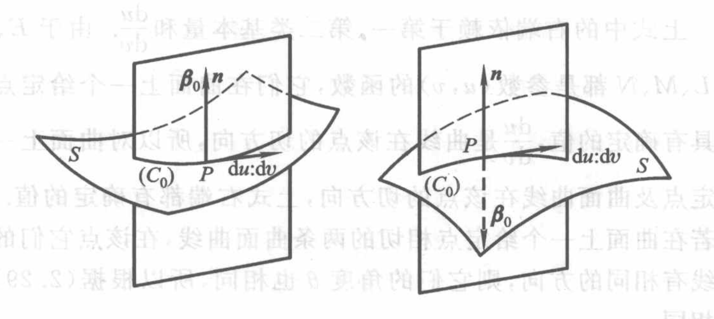


图 2－13

考虑曲面上一点在一方向(d)上的弯曲程度仅由$k_0 \geqslant 0$还不能完全确定，还要考虑曲面弯曲的方向才能全面刻画曲面上一点在方向(d)上的弯曲性，因此我们再引入法曲率的概念.

定义 曲面在给定点沿一方向的**法曲率**k_n为

$$k_n = \begin{cases} +k_0, \text{法截线向 } \boldsymbol{n} \text{ 的正侧弯曲}, \\ -k_0, \text{法截线向 } \boldsymbol{n} \text{ 的反侧弯曲}. \end{cases}$$

由公式(2.30)可得

$$k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \tag{2.31}$$

设曲面上的一曲线(C)和法截线(C_0)切于点P. 换言之，它们有相同的切方向$(d)=\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$，则从(2.29)和(2.31)可得

$$k_n = k\cos\theta,$$

根据这个关系式，所有关于曲面曲线的曲率都可以化为法曲率来讨论.

若设$R=\dfrac{1}{k}$，$R_n=\dfrac{1}{k_n}$，R称为曲线(C)的曲率半径，R_n称为曲线(C_0)的曲率半径也称为法曲率半径. 则上式又能写成

$$R = R_n\cos\theta.$$

这个公式的几何意义可以叙述如下：

梅尼埃(Meusnier)定理 曲面曲线(C)在给定点P的曲率中

心 C 就是与曲线(C)具有共同切线的法截线(C_0)上同一个点 P 的曲率中心 C_0 在曲线(C)的密切平面上的投影(如图 2-14).

例 3 若给出的曲面是球面,球面的切平面垂直于过切点的半径,这个半径就是球面的法线. 所以球面的所有法线过它的球心,因此在球面的每一点处所取的法截面必过球心. 由此推出所有法截线(C_0)是球面的大圆,并且任意法截线(C_0)的曲率中心 C_0 就是这个球的球心. 另一方面,若取球面的任意平面截线为曲线(C),则所得到的是圆,因此(C)的曲率中心是这个圆的圆心 C(如图 2-15). 现在如果从(C_0)的曲率中心 C_0(也就是球心)作圆(C)所在平面的垂线,则垂足是圆(C)的圆心,也就是曲线(C)的曲率中心 C.

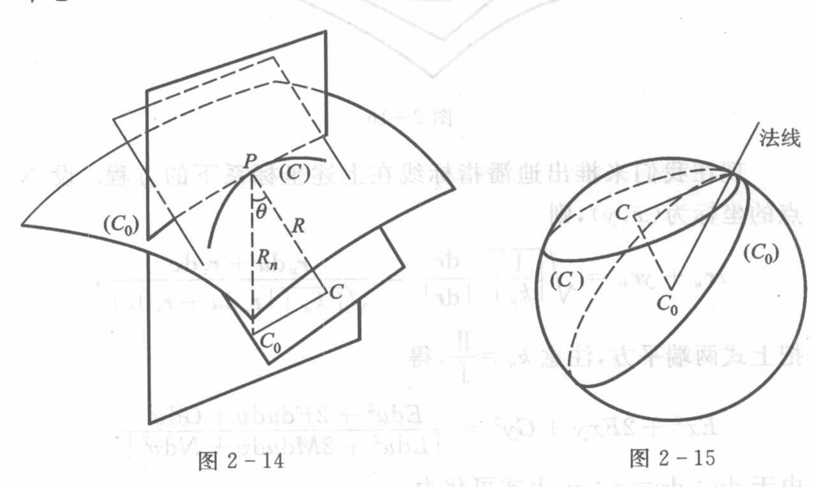


图 2-14　　　　图 2-15

3.3 迪潘(Dupin)指标线

通过曲面上一点 P 可以作无数条法截线,现在来研究这些法截线的法曲率之间的关系. 为此我们取点 P 为原点,曲面 S 的坐标曲线在 P 点的切向量 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 为基向量,则它们构成曲面 S 在 P 点切平面上的坐标系. 我们给出曲面 S 在 P 点的一个切方向

$(d)=(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$,设 k_n 是对应于方向(d)的法曲率,$|1/k_n|$ 为法曲率半径的绝对值. 过点 P 沿方向(d)(即 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v$)画一线段 PN,使其长度等于$\sqrt{\left|\dfrac{1}{k_n}\right|}$,则对于切平面上所有的方向,$N$ 点的轨迹称为曲面在 P 点的**迪潘(Dupin)指标线**(如图 2-16).

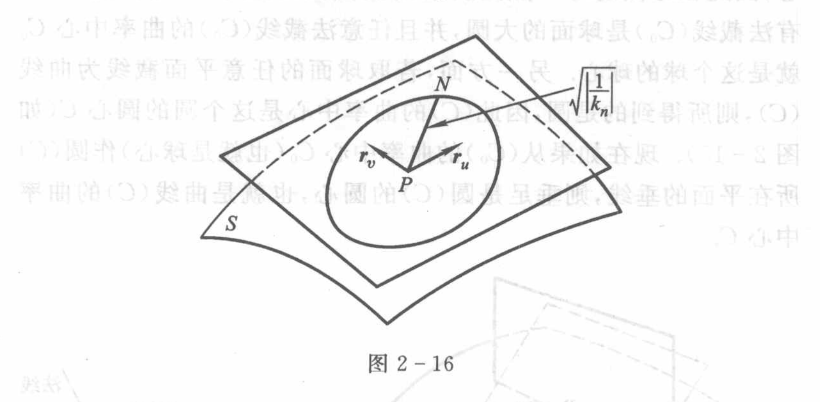


图 2-16

现在我们来推出迪潘指标线在上述坐标系下的方程. 设 N 点的坐标为(x,y),则

$$x\boldsymbol{r}_u+y\boldsymbol{r}_v=\sqrt{\left|\frac{1}{k_n}\right|}\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}=\frac{\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v}{\sqrt{|k_n|}\,|\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v|},$$

把上式两端平方,注意 $k_n=\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$,得

$$Ex^2+2Fxy+Gy^2=\frac{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}{|L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2|}.$$

由于 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v=x:y$,上式可化为

$$Ex^2+2Fxy+Gy^2=\frac{Ex^2+2Fxy+Gy^2}{|Lx^2+2Mxy+Ny^2|},$$

因此

$$|Lx^2+2Mxy+Ny^2|=1,$$

即

$$Lx^2+2Mxy+Ny^2=\pm 1.$$

这就是迪潘指标线的方程.

上式中的系数 L、M、N 与曲面上的方向无关. 它们对于曲面上已知点来说即为常数,并且上式中不含 x、y 的一次项,所以上述方程表示以 P 为中心的有心二次曲线.

这样,曲面上的点由它的迪潘指标线可以进行分类:

1° 如果 $LN-M^2>0$,则点 P 称为曲面的**椭圆点**,这时迪潘指标线是一椭圆.

2° 如果 $LN-M^2<0$,则点 P 称为曲面的**双曲点**,这时迪潘指标线是一对共轭双曲线.

3° 如果 $LN-M^2=0$,则点 P 称为曲面的**抛物点**,这时迪潘指标线是一对平行直线.

4° 如果 $L=M=N=0$,则点 P 称为曲面的**平点**(平面上的点都是平点),这时迪潘指标线不存在.

3.4 曲面的渐近方向和共轭方向

如果 P 点是曲面的双曲点,则它的迪潘指标线有一对渐近线,我们把沿渐近线的方向 $(d)=\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ 称为曲面在 P 点的**渐近方向**. 由解析几何中二次曲线的理论可知,这两个渐近方向满足方程

$$L_0\mathrm{d}u^2+2M_0\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N_0\mathrm{d}v^2=0.$$

为了避免混淆,我们在上式中用 L_0、M_0、N_0 分别表示 L、M、N 在 P 点的值.

由法曲率的公式 $k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$ 也可以得到渐近方向的等价定义:曲面上的一点 P 处使 $k_n=0$ 的方向称为曲面在 P 点的渐近方向.

曲面上的曲线,如果它上面每一点的切方向都是渐近方向,则称为**渐近曲线**. 渐近曲线的微分方程是

$$L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2=0.$$

命题 1 如果曲面上有直线,则它一定是曲面的渐近曲线.

证明 因为直线的曲率 $k=0$，所以沿直线方向的法曲率 $k_n=k\cos\theta=0$，即

$$L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2=0,$$

因而直线是曲面的渐近曲线.

命题 2 曲面在渐近曲线上一点处的切平面一定是渐近曲线的密切平面.

证明 沿渐近曲线有 $k_n=0$. 由 $k_n=k\cos\theta=0$ 得到 $k=0$ 或 $\cos\theta=0$.

当 $k=0$ 时，渐近曲线是直线，这时曲面的切平面通过它，因此切平面又是密切平面.

当 $k\neq0$，$\cos\theta=0$ 时，曲面的法向量垂直于渐近曲线的主法向量，因此曲面的切平面除通过渐近曲线的切线外还通过渐近曲线的主法向量，所以它又是渐近曲线的密切平面.

如果曲面上的点都是双曲点，则曲面上存在两族渐近曲线，这两族渐近曲线称为曲面上的**渐近网**.

命题 3 曲面的曲纹坐标网是渐近网的充分必要条件是

$$L=N=0.$$

证明 渐近网的方程是

$$L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2=0,$$

曲纹坐标网的方程是

$$\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0,$$

即

$$\mathrm{d}u=0 \quad 或 \quad \mathrm{d}v=0.$$

若 $L=N=0$，代入渐近网方程可得 $M\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0$，即 $\mathrm{d}u=0$ 或 $\mathrm{d}v=0$. 反之，若 $\mathrm{d}u=0$ 或 $\mathrm{d}v=0$，代入渐近网方程可知 $L=N=0$.

设曲面上 P 点处的两个方向为 $(d)=\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ 和 $(\delta)=\delta u:\delta v$，如果包含这两个方向的直线是 P 点的迪潘指标线的共轭直径，则方向 (d) 和 (δ) 称为曲面的**共轭方向**.

我们已得到迪潘指标线的方程是

$$L_0x^2+2M_0xy+N_0y^2=\pm 1.$$

设共轭方向(d)和(δ)上的两直线方程分别为 $y=kx$ 和 $y=k'x$，则由解析几何学可知 k 和 k' 应满足共轭条件

$$L_0+M_0(k+k')+N_0kk'=0,$$

但

$$k=\frac{y}{x}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u},\ k'=\frac{y}{x}=\frac{\delta v}{\delta u},$$

因此方向(d)和(δ)共轭的充分必要条件是

$$L_0\mathrm{d}u\delta u+M_0(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+N_0\mathrm{d}v\delta v=0. \tag{2.32}$$

由于

$$-\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}=-(\boldsymbol{n}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{n}_v\mathrm{d}v)\cdot(\boldsymbol{r}_u\delta u+\boldsymbol{r}_v\delta v)$$
$$=L_0\mathrm{d}u\delta u+M_0(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+N_0\mathrm{d}v\delta v=0,$$

因而方向(d)和(δ)共轭的条件也可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0,$$

或

$$\delta\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0.$$

当$(d)=(\delta)$时(2.32)变成渐近方向的方程，因此渐近方向是自共轭方向.

给出曲面上的两族曲线，如果过曲面上每一点，此两族曲线的两条曲线的切方向都是共轭方向，则这两族曲线称为曲面上的**共轭网**.

设共轭网的每一族曲线的方向分别为(d)和(δ)，则这两个方向应满足

$$L\mathrm{d}u\delta u+M(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+N\mathrm{d}v\delta v=0. \tag{2.33}$$

给出一族曲线的微分方程

$$A\mathrm{d}u+B\mathrm{d}v=0, \tag{2.34}$$

我们能够找到与它共轭的曲线族的微分方程. 这只需从(2.33)和(2.34)中消去 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$，得到

$$\begin{vmatrix} L\delta u+M\delta v & M\delta u+N\delta v \\ A & B \end{vmatrix}=0,$$

所以曲线族(2.34)的共轭曲线族的方程是

$$(BL-AM)\delta u+(BM-AN)\delta v=0.$$

特别地，取(2.34)为坐标曲线 $\mathrm{d}v=0$，则它的共轭曲线族是

$$L\delta u+M\delta v=0.$$

要使这族曲线是 v—曲线($\delta u=0$)的充要条件是 $M=0$，因而得到

命题 4 曲面的曲纹坐标网是共轭网的充分必要条件是

$$M=0.$$

3.5 曲面的主方向和曲率线

曲面上一点 P 的两个方向，如果它们既正交又共轭，则称为曲面在 P 点的**主方向**.

设这两个方向是 $(d)=\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$, $(\delta)=\delta u:\delta v$. 由于正交性，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0,$$

即

$$E\mathrm{d}u\delta u+F(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G\mathrm{d}v\delta v=0.$$

由于共轭性，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{n}=0 \quad 或 \quad \delta\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}=0,$$

即

$$L\mathrm{d}u\delta u+M(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+N\mathrm{d}v\delta v=0.$$

以上两个条件改写为

$$(E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v)\delta u+(F\mathrm{d}u+G\mathrm{d}v)\delta v=0,$$

$$(L\mathrm{d}u+M\mathrm{d}v)\delta u+(M\mathrm{d}u+N\mathrm{d}v)\delta v=0.$$

从以上两式消去 δu、δv 得

$$\begin{vmatrix} E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v & F\mathrm{d}u+G\mathrm{d}v \\ L\mathrm{d}u+M\mathrm{d}v & M\mathrm{d}u+N\mathrm{d}v \end{vmatrix}=0. \tag{2.35}$$

(2.35)还能写成以下形式：

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}v^2 & -\mathrm{d}u\mathrm{d}v & \mathrm{d}u^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0, \tag{2.35$'$}$$

或

$$(EM-FL)\mathrm{d}u^2+(EN-GL)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+(FN-GM)\mathrm{d}v^2=0. \tag{2.35''}$$

这是 $\mathrm{d}u : \mathrm{d}v$ 的二次方程，其判别式为

$$\Delta=(EN-GL)^2-4(EM-FL)(FN-GM)$$

$$=\left[(EN-GL)-\frac{2F}{E}(EM-FL)\right]^2+\frac{4(EG-F^2)}{E^2}(EM-FL)^2,$$

所以当且仅当

$$EN-GL=EM-FL=0 \tag{2.36}$$

时上述判别式 $\Delta=0$. (2.36)可以写成

$$\frac{E}{L}=\frac{F}{M}=\frac{G}{N}. \tag{2.37}$$

因此除(2.37)的情况外，判别式 $\Delta>0$. 这就是说，方程(2.35)″总有两个不相等的实根. 因而曲面上每一点处 $\left(\text{除了}\frac{E}{L}=\frac{F}{M}=\frac{G}{N}\text{的情形外}\right)$ 总有两个主方向. 它们也是这一点的迪潘指标线的主轴方向.

特别地，如果曲面在某一点处有

$$\frac{E}{L}=\frac{F}{M}=\frac{G}{N},$$

这种点称为曲面的**脐点**. 在脐点处(2.35)′是恒等式，因此脐点处的每一方向都是主方向. 对于 $L=M=N=0$ 的脐点在前面已经称为平点，因而平点处的每一方向也是主方向. 我们把 L、M、N 不同时为零的脐点称为**圆点**. 容易证明球面上的每一点都是圆点.

主方向的判别定理(罗德里格斯(Rodrigues)定理) 如果方向$(d)=(\mathrm{d}u : \mathrm{d}v)$是主方向，则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}=\lambda\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中 $\lambda=-k_n$，k_n 是曲面沿方向(d)的法曲率.

反之,如果对于方向(d)有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}=\lambda\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

则(d)是主方向,且 $\lambda=-k_n$，k_n 是曲面沿方向(d)的法曲率.

证明 先证定理的前半部分:

设(δ)是垂直于(d)的另一主方向. 由 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1$,两边微分得 $\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}=0$. 这关系式说明 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}$ 在切平面上,于是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}=\lambda\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\mu\delta\boldsymbol{r}.$$

将等式两边点乘 $\delta\boldsymbol{r}$,并且注意 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$(这是由于方向$(d)$和$(\delta)$的共轭性),以及 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$(这是由于这两方向的正交性),得到

$$\mu(\delta\boldsymbol{r})^2=0,$$

因此

$$\mu=0,$$

由此

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}=\lambda\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

再把这等式两边点乘 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}=\lambda\mathrm{d}\boldsymbol{r}^2,$$

由此得

$$\lambda=-\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=-k_n.$$

再证定理的后半部分:

设方向(d)满足

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}=\lambda\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

现在要证明它是主方向. 假设方向(δ)垂直于(d),把等式 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}=\lambda\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的两边点乘 $\delta\boldsymbol{r}$,得 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$,这表示方向$(d)$和$(\delta)$是共轭的.

因此(d)和(δ)不仅正交,而且共轭,所以它们都是主方向.

至于 $\lambda=-k_n$ 的证明和定理前半部分相同,我们不再重复.

曲面上一曲线,如果它每一点的切方向都是主方向,则称为曲率线,它的方程显然是

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0,$$

这方程确定了曲面上两族曲率线,组成曲面上的**曲率线网**.

可以证明,在不含脐点的曲面片上,经过参数的选择,可使曲率线网成为曲纹坐标网,从方程(2.35)通过因式分解,可以得到两族曲率线的微分方程. 它们可以写成

$$A_i du + B_i dv = 0 \quad (i = 1,2)$$

的形式,其中A_i, B_i是u,v的实函数,设λ_i为它们的任何积分因子,则$\lambda_1 A_1 du + \lambda_1 B_1 dv$与$\lambda_2 A_2 du + \lambda_2 B_2 dv$为$\bar{u}$与$\bar{v}$的全微分,即

$$d\bar{u} = \lambda_1 A_1 du + \lambda_1 B_1 dv,$$

$$d\bar{v} = \lambda_2 A_2 du + \lambda_2 B_2 dv.$$

在曲面的每一点,两个主方向互相垂直,所以曲率线彼此不相切,行列式$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$,即雅可比行列式

$$\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \lambda_1 A_1 & \lambda_1 B_1 \\ \lambda_2 A_2 & \lambda_2 B_2 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

引进$\bar{u}$, $\bar{v}$为新的参数,则曲面的曲率线网成为新的曲纹坐标网.

从这个证明还可以看出,曲面上任意一个正规曲线网都可以选为曲纹坐标网.

命题 5 曲面上的曲纹坐标网是曲率线网的充分必要条件是$F=M=0$.

证明 $F=0$是由于坐标网是正交的,$M=0$是由于它们共轭.

例 4 在旋转面$\boldsymbol{r}=\{\varphi(t)\cos\theta, \varphi(t)\sin\theta, \psi(t)\}$上子午线和平行圆构成了曲率线网. 在本章§1中已介绍过旋转面的曲纹坐标网是由子午线和平行圆组成,而且对于旋转面$\boldsymbol{r}=\{\varphi(t)\cos\theta, \varphi(t)\sin\theta, \psi(t)\}$,我们可以计算出$F=M=0$. 因此,旋转面上的曲纹坐标网是曲率线网,即旋转面上的子午线和平行圆构成了曲面

上的曲率线网.

例 5 球面上每一点都是圆点，平面上每一点都是平点. 因此，球面上和平面上的每一条曲线都是曲率线.

3.6 曲面的主曲率、高斯(Gauss)曲率和平均曲率

曲面上一点处主方向上的法曲率称为曲面在此点的**主曲率**. 由于曲面上一点处的主方向是过此点的曲率线的方向，因此主曲率也就是曲面上一点处沿曲率线方向的法曲率.

现在我们要研究在曲面上一点(非脐点)，法曲率随着方向而变化的规律. 还要证明主曲率是法曲率的最大值和最小值.

在曲面 S : $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上选曲率线网为曲纹坐标网，则 $F=M=0$，这时对于曲面的任一方向 $(d)=\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$，它的法曲率公式就简化成

$$k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{L\mathrm{d}u^2+N\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2}. \tag{2.38}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{沿 } u-\text{曲线}(\mathrm{d}v=0)\text{ 的方向对应的主曲率是 } k_1=\frac{L}{E},\\&\text{沿 } v-\text{曲线}(\mathrm{d}u=0)\text{ 的方向对应的主曲率是 } k_2=\frac{N}{G}.\end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

设 θ 为任意方向 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$ 和 $u-$曲线 $(\delta v=0)$ 方向的夹角，则

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{E\mathrm{d}u\delta u+F(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}}\\&=\frac{E\mathrm{d}u\delta u}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2}\sqrt{E\delta u^2}},\end{aligned}$$

所以

$$\cos^2\theta=\frac{E\mathrm{d}u^2}{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2}, \tag{2.40}$$

而

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{G\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2}. \tag{2.41}$$

由于(2.38)可表示为

$$k_n = \frac{L}{E}\frac{E\mathrm{d}u^2}{E\mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2} + \frac{N}{G}\frac{G\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2},$$

由此把(2.39),(2.40),(2.41)代入上式得

$$k_n = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta, \tag{2.42}$$

这个公式称为**欧拉(Euler)公式**. 在脐点这个公式仍然正确,因为这时有 $k_1 = k_2$,而沿任意方向的法曲率 $k_n = k_1 = k_2$.

欧拉公式表示只要知道了主曲率,则任意方向(d)的法曲率就可以由(d)和 u—曲线的方向之间的夹角 θ 来确定.

以下我们介绍有关主曲率的一个命题:

命题 6 曲面上一点(非脐点)的主曲率是曲面在这点所有方向的法曲率中的最大值和最小值.

证明 设 $k_1 < k_2$(如果 $k_1 > k_2$,可以交换坐标 u 和 v).

由欧拉公式知

$$k_n = k_1\cos^2\theta + k_2(1 - \cos^2\theta) = k_2 + (k_1 - k_2)\cos^2\theta,$$

于是

$$k_2 - k_n = (k_2 - k_1)\cos^2\theta \geqslant 0,$$

因此

$$k_2 \geqslant k_n.$$

同样又可以得到

$$k_n - k_1 = (k_2 - k_1)\sin^2\theta \geqslant 0,$$

因此

$$k_n \geqslant k_1,$$

即

$$k_1 \leqslant k_n \leqslant k_2.$$

这就是说,主曲率 k_2, k_1 是法曲率 k_n 的最大值和最小值.

现在我们来导出主曲率的计算公式.

由罗德里格斯定理，沿主方向(d)有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}=-k_N\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中 k_N 为主曲率，即 k_1 和 k_2，上式又可以写成

$$\boldsymbol{n}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{n}_v\mathrm{d}v=-k_N(\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v),$$

上式两边分别点乘 $\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{r}_v$ 得

$$\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_v\mathrm{d}v=-k_N(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v),$$

$$\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_v\mathrm{d}v=-k_N(\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v),$$

即得到

$$-L\mathrm{d}u-M\mathrm{d}v=-k_N(E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v),$$

$$-M\mathrm{d}u-N\mathrm{d}v=-k_N(F\mathrm{d}u+G\mathrm{d}v),$$

整理后，得

$$(L-Ek_N)\mathrm{d}u+(M-Fk_N)\mathrm{d}v=0. \tag{2.43}$$

$$(M-Fk_N)\mathrm{d}u+(N-Gk_N)\mathrm{d}v=0. \tag{2.44}$$

从(2.43)，(2.44)消去 $\mathrm{d}u$、$\mathrm{d}v$，则得主曲率的计算公式

$$\begin{vmatrix} L-k_NE & M-k_NF \\ M-k_NF & N-k_NG \end{vmatrix}=0,$$

即

$$(EG-F^2)k_N^2-(LG-2MF+NE)k_N+(LN-M^2)=0. \tag{2.45}$$

下面介绍在曲面论的许多问题中起重要作用的两种曲率.

设 k_1、k_2 为曲面上一点的两个主曲率，则它们的乘积 k_1k_2 称为曲面在这一点的**高斯(Gauss)曲率**，通常以 K 表示. 它们的平均数 $\frac{1}{2}(k_1+k_2)$ 称为曲面在这一点的**平均曲率**，通常以 H 表示. 由方程(2.45)利用二次方程的根与系数的关系，便得

高斯曲率　$K=k_1k_2=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}$，

平均曲率　$H=\dfrac{1}{2}(k_1+k_2)=\dfrac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}$.

对于曲面的特殊参数表示 $z=z(x,y)$，由于

$$E=1+p^2,\ F=pq,\ G=1+q^2,$$

$$EG-F^2=1+p^2+q^2,$$

$$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

因此得

$$K=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

$$H=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{2(1+p^2+q^2)^{3/2}}.$$

例 6 求旋转曲面 $\boldsymbol{r}=\{\varphi(u)\cos\theta,\ \varphi(u)\sin\theta,\ \psi(u)\}$，$\varphi(u)>0$ 的高斯曲率和平均曲率.

解 $\boldsymbol{r}=\{\varphi(u)\cos\theta,\ \varphi(u)\sin\theta,\ \psi(u)\}$，

$\boldsymbol{r}_u=\{\varphi'\cos\theta,\ \varphi'\sin\theta,\ \psi'(u)\}$，

$\boldsymbol{r}_\theta=\{-\varphi\sin\theta,\ \varphi\cos\theta,\ 0\}$，

$E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u=\varphi'^2+\psi'^2$，$F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_\theta=0$，$G=\boldsymbol{r}_\theta\cdot\boldsymbol{r}_\theta=\varphi^2$，

$\sqrt{EG-F^2}=\varphi\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}$，

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_\theta}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{\{-\psi'\cos\theta,-\psi'\sin\theta,\varphi'\}}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}},$$

$\boldsymbol{r}_{uu}=\{\varphi''\cos\theta,\ \varphi''\sin\theta,\psi''\}$，

$\boldsymbol{r}_{u\theta}=\{-\varphi'\sin\theta,\ \varphi'\cos\theta,0\}$，

$\boldsymbol{r}_{\theta\theta}=\{-\varphi\cos\theta,\ -\varphi\sin\theta,0\}$，

$$L=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu}=-\frac{\varphi''\psi'-\varphi'\psi''}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}},M=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{u\theta}=0,$$

$$N=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{\theta\theta}=\frac{\varphi\psi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}.$$

特别地，取 xOz 平面上最初的曲线为 $x=\varphi(z)$，即取坐标 z 作

为最初的曲线的参数，那么有

$$z = \psi(u) = u,$$

于是得

$$L = \frac{-\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}},\ M = 0,\ N = \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi'^2}}.$$

因为 $F=M=0$，所以旋转面的坐标曲线（子午线和纬线）是曲率线，并且主曲率为

$$k_1 = \frac{L}{E} = -\frac{\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{3/2}},$$

$$k_2 = \frac{N}{G} = \frac{1}{\varphi\sqrt{1+\varphi'^2}}.$$

所以曲面在一点的高斯曲率为

$$K = k_1 k_2 = -\frac{\varphi''}{\varphi(1+\varphi'^2)^2},$$

平均曲率为

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1+\varphi'^2-\varphi\varphi''}{2\varphi(1+\varphi'^2)^{3/2}}.$$

例 7 一个曲面如果它每一点处的平均曲率 $H=0$，则称之为**极小曲面**（详见本章 §6）. 可以证明，以空间闭曲线为边界的曲面域中，面积最小的曲面必是极小曲面，即平均曲率为零的曲面. 极小曲面的实际模型是将在空间中弯曲的铅丝浸入肥皂溶液中，取出时所得的皂膜曲面.

现在我们要求出极小旋转曲面，即求出 $H=0$ 的旋转曲面.

由例 6 中可知

$$H = \frac{1+\varphi'^2-\varphi\varphi''}{2\varphi(1+\varphi'^2)^{3/2}} = 0,$$

所以

$$1+\varphi'^2-\varphi\varphi'' = 0,$$

由此得

$$\frac{\varphi''\varphi'}{1+\varphi'^2}=\frac{\varphi'}{\varphi},$$

即

$$\frac{1}{2}\{\ln(1+\varphi'^2)\}'=(\ln\varphi)'.$$

积分后我们得到

$$\varphi=a\sqrt{1+\varphi'^2},\ a=\text{常数},$$

或者

$$\frac{\varphi'}{\sqrt{\frac{\varphi^2}{a^2}-1}}=1.$$

上式可以变成

$$\left\{\ln\left[\frac{\varphi}{a}+\sqrt{\frac{\varphi^2}{a^2}-1}\right]\right\}'=\frac{1}{a},$$

积分后得

$$\ln\left[\frac{\varphi}{a}+\sqrt{\frac{\varphi^2}{a^2}-1}\right]=\frac{z}{a},$$

即

$$\varphi(z)=\frac{a}{2}(\mathrm{e}^{z/a}+\mathrm{e}^{-z/a}),$$

这里省去了积分常数,因为它只不过表示沿平行于旋转轴的平移而已.

因此曲面是由悬链线

$$x=\frac{a}{2}(\mathrm{e}^{z/a}+\mathrm{e}^{-z/a})$$

旋转而成,称为悬链面. 在形状上它很像压扁了的单叶双曲旋转面.

3.7 曲面在一点邻近的结构

为了研究曲面的弯曲性,我们注意到高斯曲率 K 与 $LN-M^2$

是同号的，这是因为

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2},$$

上式中分母总是正的（因 $EG-F^2=(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)^2>0$）. 因此 K 的符号由 $LN-M^2$ 的符号来确定. 从而，$K>0$ 的点是椭圆点，$K<0$ 的点是双曲点，$K=0$ 的点是抛物点或平点.

现在我们分别讨论曲面在每一类点的邻近的情况：

1° 椭圆点

$$K>0 \quad 或 \quad LN-M^2>0,$$

这时主曲率 k_1、k_2 同号，即 $k_1>0,k_2>0$ 或 $k_1<0,k_2<0$.

适当地选择曲面的法向量 $\boldsymbol{n}$，我们可以只考虑 k_1 和 k_2 都大于零的情形.

根据欧拉公式

$$k_n=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta,$$

所以曲面的任意方向的法曲率都大于零，而 k_n 就是相应的法截线的曲率.

以上说明了曲面沿所有方向都朝同一侧弯曲.

由于主曲率 $k_1>0,k_2>0$，这就是说主方向上的两个法截线的曲率分别为 k_1 和 k_2，这两个法截线都是平面曲线. 根据第一章§3的结果知道它们的近似曲线的方程分别为

$$y=\frac{k_1}{2}x^2,\ y=\frac{k_2}{2}x^2,$$

这是两条抛物线. 由此可以看出曲面在椭圆点邻近的形状近似于椭圆抛物面（如图 2-17）.

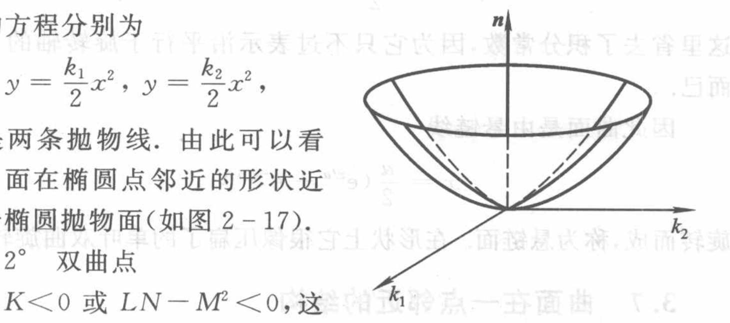


图 2-17

2° 双曲点

$K<0$ 或 $LN-M^2<0$，这时主曲率 k_1、k_2 异号. 适当地

选择曲面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 后有

$$k_1 < 0,\ k_2 > 0.$$

因此对应于主方向的两条法截线中有一条朝 $\boldsymbol{n}$ 的反向弯曲，另一条朝 $\boldsymbol{n}$ 的正向弯曲.

根据欧拉公式

$$k_n = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta,$$

得到各个方向的法曲率 k_n 的变化情况如下表：

θ	0				$\frac{\pi}{2}$				π				$\frac{3\pi}{2}$				2π
k_n	k_1	↗	0	↗	k_2	↘	0	↘	k_1	↗	0	↗	k_2	↘	0	↘	k_1

由此可以看出，法曲率在四个方向上为零，它们就是双曲点的渐近方向（如图 2-18），也就是迪潘指标线的渐近线的方向.

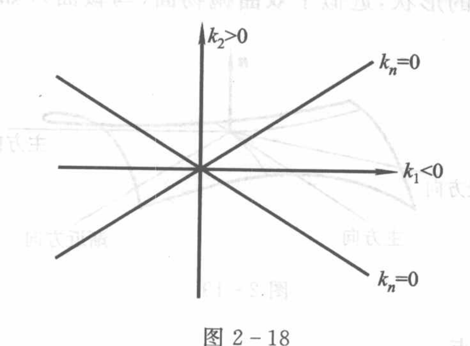


图 2-18

我们进一步用欧拉公式可以求出渐近方向所对应的 θ 值.

由于

$$k_n = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta = 0,$$

所以

$$\tan\theta = \pm\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}},$$

即

$$\theta = \pm \arctan \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}.$$

渐近方向的两对对顶角中，一对对顶角包含具有 $k_n<0$ 的法截线的方向，对于这些方向曲面朝 $\boldsymbol{n}$ 的反向弯曲. 另一对对顶角包含具有 $k_n>0$ 的法截线的方向，对于这些方向曲面朝 $\boldsymbol{n}$ 的正向弯曲.

现在我们来观察主方向上法截线的形状，它们分别近似于抛物线：

$$y = \frac{k_1}{2}x^2 \quad (k_1 < 0),$$

$$y = \frac{k_2}{2}x^2 \quad (k_2 > 0),$$

其中前一个朝 $\boldsymbol{n}$ 的反向弯曲，后一个朝 $\boldsymbol{n}$ 的正向弯曲. 因此，曲面在双曲点邻近的形状，近似于双曲抛物面(马鞍面)(如图 2-19).

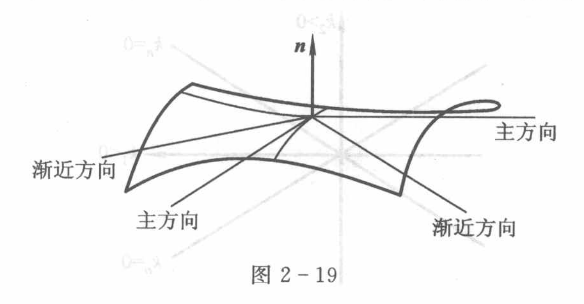


图 2-19

3° 抛物点

$$K=0 \quad 或 \quad LN-M^2=0,$$

这时 k_1、k_2 中至少有一个等于零. 适当选取法向量 $\boldsymbol{n}$ 后有

$$k_1 < 0, k_2 = 0.$$

因此对应于主方向的两条法截线中有一条朝 $\boldsymbol{n}$ 的反向弯曲，另一个主方向是渐近方向. 由于这时除 $k_2=0$ 外，k_n 总是取负值，因而除渐近方向外，一切法截线都朝 $\boldsymbol{n}$ 的反向弯曲.

根据第一章 §3 的结果，主方向上法截线的形状分别近似于

$$y = \frac{k_1}{2}x^2,$$

$$y = \frac{k_2}{6}x^3,$$

其中前一个由于 $k_1<0$,因此是朝 $\boldsymbol{n}$ 的反向弯曲的抛物线,后一个为立方抛物线(如图 2-20).

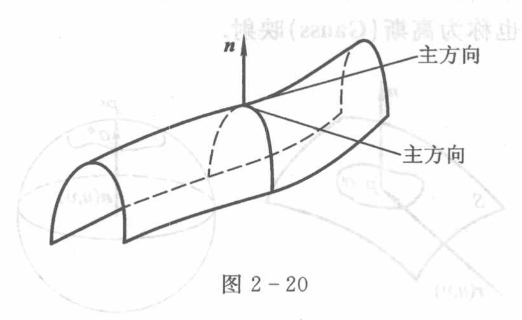


图 2-20

对于平点来说 $L=M=N=0$,因此主曲率 $k_1=k_2=0$,这时主方向上两条法截线的形状都近似于立方抛物线:

$$y = \frac{1}{6}k_1x^3,$$

$$y = \frac{1}{6}k_2x^3.$$

3.8 高斯曲率的几何意义

从以上的讨论,我们了解到高斯曲率的值所给出的对于曲面的一般弯曲性的分析是从各个方向的法曲率分布概括出来的. 如果不利用关于曲面曲线的研究结果,而直接讨论高斯曲率的几何意义,就可以更明显地说明上述事实. 为此我们先介绍曲面的球面表示.

设 σ 是曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上一块不大的区域,另外再作一单位球面. 现在我们建立 σ 中的点和单位球面上的点的对应关系如下:σ 中任取一点 $P(u,v)$,作曲面在 P 点处的单位法向量 $\boldsymbol{n}=$

$\boldsymbol{n}(u,v)$,然后把 $\boldsymbol{n}$ 的始端平移到单位球的中心,则 $\boldsymbol{n}$ 的另一端点就在单位球面上. 设该点为 P',这样对于曲面的小区域 σ 中的每一点 $\boldsymbol{r}(u,v)$,$(u,v)\in\sigma$ 与球面上向径为 $\boldsymbol{n}(u,v)$ 的点对应. 因此,曲面上所给出的小区域 σ 表示到单位球面的对应区域 σ^* 上. 这就是说,建立了曲面的小区域 σ 到单位球面上区域 σ^* 的对应. 我们把曲面上的点与球面上的点的这种对应称为曲面的**球面表示**(如图 2-21),也称为**高斯(Gauss)映射**.

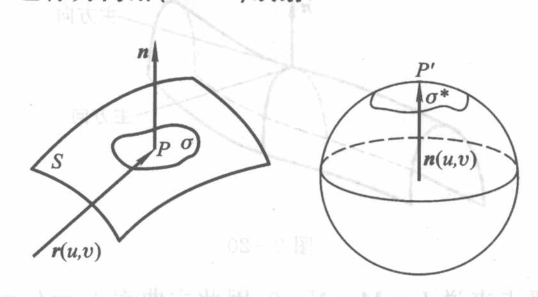


图 2-21

当 P 点在曲面 S 上描出一曲线时,通过球面表示它的对应点 P' 在单位球面上也描出对应的曲线. 因此,当 P 点在曲面上描出一微小弧 $\mathrm{d}s$ 时,P' 点在球面上也描出一微小弧 $\mathrm{d}s^*$.

定义 曲面的第三基本形式为

$$\mathrm{III} = \mathrm{d}s^{*2} = \mathrm{d}\boldsymbol{n}^2 = e\mathrm{d}u^2 + 2f\mathrm{d}u\mathrm{d}v + g\mathrm{d}v^2,$$

换言之,曲面的球面表示的第一基本形式叫做原曲面的第三基本形式.

由于

$$\begin{aligned}\mathrm{III} &= \mathrm{d}\boldsymbol{n}^2 = (\boldsymbol{n}_u\mathrm{d}u + \boldsymbol{n}_v\mathrm{d}v)^2\\ &= \boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_u\mathrm{d}u^2 + 2\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_v\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{n}_v\mathrm{d}v^2,\end{aligned}$$

所以

$$e = \boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_u,\ f = \boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_v,\ g = \boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{n}_v,$$

e、f、g 叫做曲面的**第三类基本量**.

以下证明第三基本形式III可以用第一和第二基本形式来表

示. 为此,我们选取曲率线网为坐标网,则曲面 S 的第一、第二基本形式可以写成

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= E\mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2, \\ \mathrm{II} &= L\mathrm{d}u^2 + N\mathrm{d}v^2. \end{aligned} \tag{2.46}$$

由于我们选取了曲率线网为坐标网,故 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 分别为主方向,设 k_1、k_2 分别为 u—曲线方向和 v—曲线方向的主曲率,则根据罗德里格斯定理

$$\boldsymbol{n}_u = -k_1\boldsymbol{r}_u, \quad \boldsymbol{n}_v = -k_2\boldsymbol{r}_v,$$

由此可得

$$\begin{aligned} e &= \boldsymbol{n}_u \cdot \boldsymbol{n}_u = k_1^2\boldsymbol{r}_u^2 = k_1^2E, \\ f &= \boldsymbol{n}_u \cdot \boldsymbol{n}_v = k_1k_2\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v = 0, \\ g &= \boldsymbol{n}_v \cdot \boldsymbol{n}_v = k_2^2\boldsymbol{r}_v^2 = k_2^2G. \end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{III} = k_1^2E\mathrm{d}u^2 + k_2^2G\mathrm{d}v^2, \tag{2.47}$$

同时

$$\begin{aligned} L &= -\boldsymbol{n}_u \cdot \boldsymbol{r}_u = k_1\boldsymbol{r}_u^2 = k_1E, \\ N &= -\boldsymbol{n}_v \cdot \boldsymbol{r}_v = k_2\boldsymbol{r}_v^2 = k_2G, \end{aligned}$$

因而

$$\mathrm{II} = k_1E\mathrm{d}u^2 + k_2G\mathrm{d}v^2. \tag{2.48}$$

从(2.46),(2.47),(2.48)得到

$$\mathrm{III} - (k_1 + k_2)\mathrm{II} + k_1k_2\mathrm{I} = 0.$$

由于高斯曲率 $K=k_1k_2$,平均曲率 $H=\dfrac{k_1+k_2}{2}$,因而曲面的三个基本形式之间有如下的线性关系:

$$\mathrm{III} - 2H\mathrm{II} + K\mathrm{I} = 0.$$

因为三个基本形式与 H、K 都跟坐标曲线的选择无关,所以这个关系式对于曲面的任何坐标都成立.

这样我们证明了曲面的第三基本形式可以由第一、第二基本形式来表示.

现在我们研究高斯曲率的几何意义. 曲面的小区域σ在球面表示(高斯映射)下对应到球面的区域σ^*. 如果当曲面在这块σ上弯曲的程度越大时,它的对应球面区域σ^*也就越大. 因而σ的弯曲程度可以用σ^*的面积对于σ本身的面积的比值来刻画. 曲面在已知点处的弯曲程度自然就用这个比值当σ收缩成点P时的极限来衡量. 以下我们要证明这个极限就等于在P点的高斯曲率的绝对值.

命题 7 曲面上P点邻近的区域σ在单位球面上的表示是σ^*,当σ趋于曲面上已知点P时,σ^*的面积与区域σ的面积之比趋于曲面在P点的高斯曲率的绝对值. 即

$$|K_P| = \lim_{\sigma\to P}\frac{\sigma^*\ \text{的面积}}{\sigma\ \text{的面积}}.$$

证明 由本章§2的(2.25)有

$$\sigma\ \text{的面积} = \iint_{\bar\sigma} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{2.49}$$

$$\sigma^*\ \text{的面积} = \iint_{\bar\sigma} |\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v|\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{2.50}$$

等式右边的积分区域$\bar\sigma$为曲纹坐标u, v的变化区域,而u, v同时为这两个积分中的变数.

此外由于向量积

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \quad \text{和} \quad \boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v$$

分别是曲面与球面的法向量,且因对应法线互相平行,所以

$$\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v = \lambda(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v). \tag{2.51}$$

为确定因子λ,两边点乘向量$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$,即

$$(\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v)\cdot(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v) = \lambda(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\cdot(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v).$$

根据拉格朗日恒等式有

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{r}_v \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v \end{vmatrix},$$

即

$$LN - M^2 = \lambda(EG - F^2),$$

由此得

$$\lambda = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K,$$

代入(2.51)则有

$$\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v = K(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v). \tag{2.52}$$

把

$$|\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v| = |K| |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|$$

代入(2.50)得

$$\sigma^* \text{ 的面积} = \iint_{\bar{\sigma}} |K| |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

应用二重积分的中值定理,就有

$$\sigma^* \text{ 的面积} = |K_Q| \iint_{\bar{\sigma}} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = |K_Q| \cdot (\sigma \text{ 的面积}),$$

其中 K_Q 表示高斯曲率在区域 σ 中某一内点 Q 的值.

现在让区域 σ 趋于点 P,这时点 Q 也趋于 P,于是从上式得

$$\lim_{\sigma \to P} \frac{\sigma^* \text{ 的面积}}{\sigma \text{ 的面积}} = \lim_{\sigma \to P} |K_Q| = \lim_{Q \to P} |K_Q| = |K_P|.$$

由此得到曲面在 P 点的高斯曲率的绝对值的几何意义是单位球面上的区域 σ^* 的面积与曲面上的对应区域 σ 的面积之比值,当 σ 趋于 P 时的极限.

以下给出在球面表示时高斯曲率的符号的几何意义. 由于

$$\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v = K(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v),$$

其中 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ 是曲面的法向量,$\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v$ 是球面的法向量.

$K>0$ 表示这两法向量指向一致,因此从 $\boldsymbol{r}_u$ 到 $\boldsymbol{r}_v$ 的旋转方向和 $\boldsymbol{n}_u$ 到 $\boldsymbol{n}_v$ 的旋转方向相同. $K<0$ 表示这两法向量的方向相反,从而 $\boldsymbol{r}_u$ 到 $\boldsymbol{r}_v$ 的旋转方向和从 $\boldsymbol{n}_u$ 到 $\boldsymbol{n}_v$ 的旋转方向相反.



习　题

1. 计算悬链面

$$r = \{\cos\text{h}\, u\cos v,\ \cos\text{h}\, u\sin v,\ u\}$$

的第一、第二类基本量.

2. 计算抛物面 $2x_3 = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$ 在原点的第一、第二基本形式.

3. 证明对于正螺面

$$r = \{u\cos v,\ u\sin v,\ bv\},\ -\infty < u < +\infty,\ -\infty < v < +\infty$$

处处有 $EN - 2FM + GL = 0$.

4. 求出抛物面 $z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$ 在(0,0)点和方向($dx : dy$)的法曲率.

5. 已知平面 π 到单位球面 S 的中心距离为 $d(0 < d < 1)$,求 π 与 S 交线的曲率与法曲率.

6. 利用法曲率公式 $k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$ 证明在球面上对于任何曲纹坐标第一、二类基本量成比例.

7. 求证在正螺面上有一族渐近线是直线,另一族是螺旋线.

8. 求曲面 $z = xy^2$ 的渐近线.

9. 证明每一条曲线在它的主法线曲面上是渐近曲线.

10. 证明在曲面 $z = f(x) + g(y)$ 上曲线族 $x =$ 常数,$y =$ 常数构成共轭网.

11. 确定螺旋面 $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = cv$ 上的曲率线.

12. 找出双曲面 $z = axy$ 上的曲率线.

13. 求曲面 $r = \left\{\frac{a}{2}(u - v),\ \frac{b}{2}(u + v),\ \frac{uv}{2}\right\}$ 上的曲率线的方程.

14. 给出曲面上一条曲率线 Γ,设 Γ 上每一处的副法向量和曲面在该点处的法向量成定角. 求证 Γ 是一平面曲线.

15. 如果一曲面的曲率线的密切平面与切平面交成定角,则它是平面曲线.

16. 求正螺面的主曲率.

17. 确定抛物面 $z = a(x^2 + y^2)$ 在(0,0)点的主曲率.

18. 证明在曲面上给定点处,沿相互成为直角的方向的法曲率之和为常数.

19. 证明若曲面的两族渐近曲线交于定角,则主曲率之比为一个常数.

20. 求证正螺面的平均曲率为零.

21. 找出双曲面 $z = axy$ 在点 $x = y = 0$ 的平均曲率和高斯曲率.

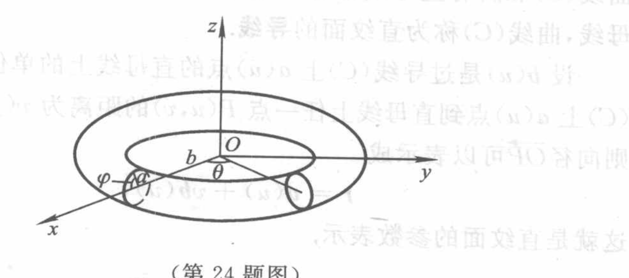
22. 证明极小曲面上的点都是双曲点或平点.

23. 求证如果曲面的平均曲率为零，则渐近线构成正交网.

24. 在 xOz 平面上取圆周 $y=0$，$(x-b)^2+z^2=a^2(b>a)$，并令其绕 z 轴旋转得圆环面. 圆环面的参数方程是

$$\boldsymbol{r}=\{(b+a\cos\varphi)\cos\theta,\ (b+a\cos\varphi)\sin\theta,\ a\sin\varphi\}$$

$(0\leqslant\varphi<2\pi,\ 0\leqslant\theta<2\pi)$，求圆环面上的椭圆点，双曲点和抛物点（如第 24 题图所示）.



（第 24 题图）

25. 若曲面的第一基本形式表示为 $\mathrm{I}=\lambda^2(u,v)(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$ 的形式，则称这个曲面的坐标曲线网为等温网，试证：旋转曲面 $\boldsymbol{r}=\{g(t)\cos\theta,\ g(t)\sin\theta,\ f(t)\}$ 上存在等温网.

26. 若两个曲面 S_1、S_2 交于一条曲线 (C)，而且 (C) 是 S_1 的一条曲率线，则 (C) 也是 S_2 的曲率线的充要条件是 S_1、S_2 沿着 (C) 相交成固定角.

27. 证明在曲面 S 上一个双曲点 P 处，若两条渐近曲线都不是直线，则它们之中，一条在点 P 的挠率是 $\sqrt{-K}$，另一条在点 P 的挠率是 $-\sqrt{-K}$，其中 K 是 S 在点 P 的高斯曲率.

28. 证明如果曲面上无抛物点，则它上面的点和球面像上的点是一一对应的.

§4 直纹面和可展曲面

4.1 直纹面

由直线的轨迹所成的曲面称为**直纹面**，这些直线称为直纹面

的**直母线**．柱面、锥面、单叶双曲面（纸篓面）、双曲抛物面（马鞍面）、空间曲线的切线曲面等都是直纹面．现在我们来导出直纹面的参数表示．

直纹面上取一条曲线 (C)，它的参数表示是

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u).$$

曲线 (C) 和所有直母线相交，即过曲线 (C) 的每一点 $u=u_0$，有一直母线，曲线 (C) 称为直纹面的**导线**．

设 $\boldsymbol{b}(u)$ 是过导线 (C) 上 $\boldsymbol{a}(u)$ 点的直母线上的单位向量．导线 (C) 上 $\boldsymbol{a}(u)$ 点到直母线上任一点 $P(u,v)$ 的距离为 v（如图 2－22），则向径 $\overrightarrow{OP}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u), \tag{2.53}$$

这就是直纹面的参数表示．

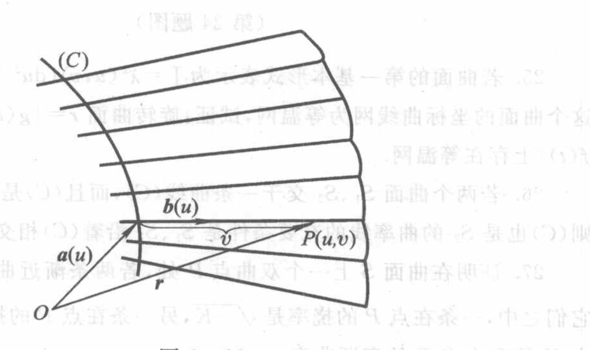


图 2－22

由 (2.53) 可以看出直纹面的 v－曲线（u＝常数）是直母线，u－曲线（v＝常数）是和导线 (C) 平行的曲线．

我们来计算直纹面上任一点 $P(u,v)$ 的法向量 $\boldsymbol{n}$．它平行于 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$，从 (2.53) 容易算出：

$$\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{a}'(u)+v\boldsymbol{b}'(u),\ \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{b}(u),$$

所以

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}+v\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{b}.$$

我们现在来讨论当 P 点在曲面上沿一条直母线移动时，法向量 $\boldsymbol{n}$ 的变化情况：

情形 1：$\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}\not\parallel\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{b}$，即 $(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')\neq 0$.

这时当 P 点在一条直母线上移动时，参数 v 随 P 点的变动而变化，因此法向量 $\boldsymbol{n}$(或切平面)绕直母线而旋转.

情形 2：$\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{b}$，即 $(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$.

这时当 P 点沿一条直母线移动时，虽然 v 变化了，但是 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 只改变长度，不改变方向. 也就是说 $\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$保持不变. 这说明 P 点沿直母线移动时，它的法向量(或切平面)不变，此时直纹面沿一条直母线有同一个切平面.

对于直纹面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$ 有 $\boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{b}(u)$，所以曲面在 P 点的沿方向 $\boldsymbol{r}_v$ 的法截线就是直母线，这是一条直线，它的曲率为零. 根据梅尼埃定理 $k_n=k\cos\theta$，因此 P 点在方向 $\boldsymbol{r}_v$ 上的法曲率 $k_n=0$. 根据以前的讨论，只有当 P 点是双曲点或抛物点时才可能出现 $k_n=0$ 的情形. 这说明了直纹面上高斯曲率 $K\leqslant 0$.

下面我们将指出对于情形 1 有 $K<0$；对于情形 2 有 $K=0$.

由直纹面的参数表示

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u),$$

得到

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\boldsymbol{a}''+v\boldsymbol{b}'',\ \boldsymbol{r}_{uv}=\boldsymbol{b}',\ \boldsymbol{r}_{vv}=0.$$

单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\frac{\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}+v\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{b}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

由此得第二类基本量为

$$\begin{aligned}L&=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}\\&=\frac{(\boldsymbol{b}'',\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b})v^2+[(\boldsymbol{a}'',\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}'',\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b})]v+(\boldsymbol{a}'',\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b})}{\sqrt{EG-F^2}},\end{aligned}$$

$$M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{(\boldsymbol{b}',\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b})}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$N = \boldsymbol{r}_{vv} \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

再计算高斯曲率

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-(\boldsymbol{b}', \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b})^2}{(EG - F^2)^2}.$$

因而对于情形 1，$(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}') \neq 0$ 有高斯曲率 $K < 0$，对于情形 2，$(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}') = 0$ 有 $K = 0$.

我们已经知道对于法曲率 k_n 有 $k_n = \frac{\text{II}}{\text{I}}$，又因为沿着直纹面的直母线有 $k_n = 0$，所以有 $\text{II} = 0$，因此直纹面的直母线一定是渐近线.

我们要考虑两条无限邻近的直母线的相互位置.

先定义直纹面的腰曲线.

设 l 是过导线上点 $\boldsymbol{a}(u)$ 的直母线，l' 是过导线上 $\boldsymbol{a}(u)$ 的邻近点 $\boldsymbol{a}(u + \Delta u)$ 的直母线，作 l 和 l' 的公垂线（如图 2－23），垂足分别为 M 和 M'，公垂线 MM' 的垂足 M 当 $\Delta u \to 0$ 时沿直母线趋近于极限位置 M_0，点 M_0 称为直母线 l 上的**腰点**. 下面我们导出腰点的向径表达式.

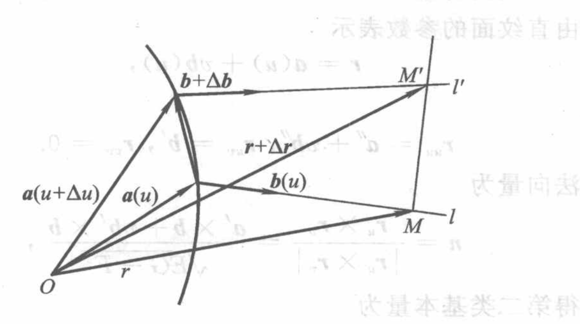


图 2－23

垂足 M, M' 所对应的向径为

$$M: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{b}(u),$$

$$M': \boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \Delta\boldsymbol{a} + (v + \Delta v)(\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}),$$

由以上两式得到

$$\overrightarrow{MM'} = \Delta \boldsymbol{r} = \Delta \boldsymbol{a} + v\Delta \boldsymbol{b} + \Delta v(\boldsymbol{b} + \Delta \boldsymbol{b}). \quad (2.54)$$

又因为$\overrightarrow{MM'}$是两直母线的公垂线，所以垂直于 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}$，因而垂直于 $\Delta\boldsymbol{b}$. 这样有

$$\overrightarrow{MM'} \cdot \Delta \boldsymbol{b} = 0.$$

把(2.54)代入得

$$\Delta \boldsymbol{a} \cdot \Delta \boldsymbol{b} + v\Delta \boldsymbol{b} \cdot \Delta \boldsymbol{b} + \Delta v(\boldsymbol{b} + \Delta \boldsymbol{b}) \cdot \Delta \boldsymbol{b} = 0,$$

上式除以$(\Delta u)^2$

$$\frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta \boldsymbol{b}}{\Delta u} + v\frac{\Delta \boldsymbol{b}}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta \boldsymbol{b}}{\Delta u} + \frac{\Delta v}{\Delta u}(\boldsymbol{b} + \Delta \boldsymbol{b}) \frac{\Delta \boldsymbol{b}}{\Delta u} = 0. \quad (2.55)$$

当 $\Delta u \to 0$ 时，我们考虑 MM'的极限位置. 在这里我们假设 $\boldsymbol{b}'(u) \neq \boldsymbol{0}$（对于 $\boldsymbol{b}'(u)=\boldsymbol{0}$的情形在以后讨论）.

注意当 $\Delta u \to 0$ 时有

$$\frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\Delta u} \to \boldsymbol{a}', \quad \frac{\Delta \boldsymbol{b}}{\Delta u} \to \boldsymbol{b}',$$

$$\frac{\Delta \boldsymbol{b}}{\Delta u} \cdot \Delta \boldsymbol{b} \to \boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{0} = 0. \quad \boldsymbol{b} \cdot \frac{\Delta \boldsymbol{b}}{\Delta u} \to \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}' = 0.$$

这时(2.55)式为

$$\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{b}' + v\boldsymbol{b}'^2 = 0,$$

因而

$$v = -\frac{\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{b}'}{\boldsymbol{b}'^2}.$$

把它代入到 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$后得到腰点的向径表达式：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) - \frac{\boldsymbol{a}'(u) \cdot \boldsymbol{b}'(u)}{\boldsymbol{b}'(u)^2} \boldsymbol{b}(u). \quad (2.56)$$

总之在直纹面的每一条直母线上（假定 $\boldsymbol{b}'(u) \neq \boldsymbol{0}$）有一个腰点，这些腰点的轨迹称为**腰曲线**. 在方程(2.56)中以 u 为参数，则它表示腰点向径的变动与参数 u 有关，也就是与母线的选择有关. 因此(2.56)就是腰曲线的参数方程. 腰曲线的几何意义是它沿直纹面的狭窄部位“围绕着”这直纹面. 若我们取腰曲线为导线 $\boldsymbol{r}=$

$\boldsymbol{a}(u)$，则在(2.56)中腰曲线的向径 $\boldsymbol{r}$ 就是导线的向径 $\boldsymbol{a}$，因此得到腰曲线是导线的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'=0$ 即 $\boldsymbol{a}'\perp\boldsymbol{b}'$.

4.2 可展曲面

在§4.1中，我们把直纹面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$ 分为两种情形：

1° $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}' \nparallel \boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{b}$，即 $(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')\neq 0$；

2° $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}' \parallel \boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{b}$，即 $(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$.

对于第2°种情形的直纹面我们称为**可展曲面**，也就是说，可展曲面是沿一条直母线有同一个切平面的直纹面.

命题1 每一个可展曲面或是柱面，或是锥面，或是一条曲线的切线曲面.

证明 对于可展曲面有 $(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$，我们取腰曲线为导线，即此时有 $\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'=0$.

(i) 当 $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}(u)=$ 常向量，这表示腰曲线退化为一点，也就是说，各条直母线上的腰点都重合. 我们得到以所有母线上公共的腰点为顶点的锥面(如图2-24).

(ii) 当 $\boldsymbol{a}'\neq\boldsymbol{0}$ 时，由条件 $(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$，$\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'=0$ 并且 $|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}'$ 得到 $\boldsymbol{a}'\parallel\boldsymbol{b}$. 这时得到切于腰曲线的切线曲面(如图2-25).

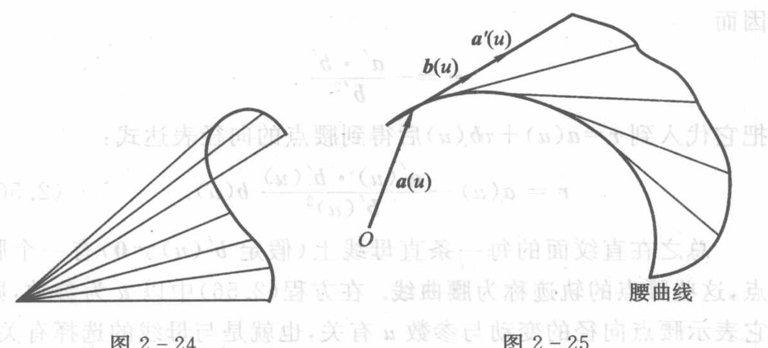


图 2-24　　图 2-25

(iii) 当 $\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{b}(u)=$ 常向量，这表示柱面(如图2-26).

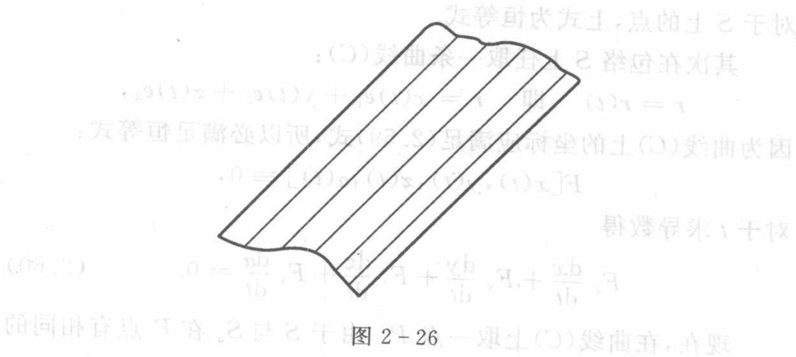


图 2-26

反过来也成立，即：

每一柱面、锥面或任意空间曲线的切线曲面是可展曲面（证明留作习题）.

为了进一步研究可展曲面，我们先介绍单参数曲面族的包络的概念.

给出一个单参数曲面族

$$\{S_\alpha\}: F(x,y,z,\alpha)=0, \tag{2.57}$$

其中 α 是参数. 当 α 的值变化时，我们得到族中不同的曲面 S_α，并且假定函数 $F(x,y,z,\alpha)$ 具有一阶与二阶连续偏导数.

如果有一个曲面 S，它的每一点是 $\{S_\alpha\}$ 族中一个曲面 S_α 的点，而且在 S 与 S_α 的公共点它们有相同的切平面，反过来，对 $\{S_\alpha\}$ 族中每一个曲面 S_α，在曲面 S 上有一点 P_α 使 S_α 与 S 在 P_α 点有相同的切平面，则 S 称为单参数曲面族 $\{S_\alpha\}$ 的**包络**.

现在假定曲面族 $\{S_\alpha\}$ 的包络 S 存在，则根据上述定义，S 上任意点 $P(x,y,z)$ 必在族中某一个曲面上，而这个曲面由参数 α 来确定，所以包络 S 上每一点对应于 α 的一个确定值. 因而 α 为 S 上点的坐标 (x,y,z) 的函数：

$$\alpha=\alpha(x,y,z), \tag{2.58}$$

把它代入(2.57)得

$$F[x,y,z,\alpha(x,y,z)]=0. \tag{2.59}$$

对于 S 上的点，上式为恒等式.

其次在包络 S 上任取一条曲线(C)：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \quad 即 \quad \boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3,$$

因为曲线(C)上的坐标应满足(2.59)式，所以必满足恒等式：

$$F[x(t),y(t),z(t),\alpha(t)]\equiv 0,$$

对于 t 求导数得

$$F_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+F_\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=0. \tag{2.60}$$

现在，在曲线(C)上取一点 P. 由于 S 与 S_α 在 P 点有相同的切平面，曲线(C)在 P 点的切线和 S_α 在 P 点的法线垂直，即

$$F_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=0^{①}. \tag{2.61}$$

比较(2.60)和(2.61)便得

$$F_\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=0, \tag{2.62}$$

这对包络 S 上每条曲线都成立.

因为曲线(C)可以在包络面上任意选择，使得$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\neq 0$，因此

$$F_\alpha=0,$$

即

$$F_\alpha[x,y,z,\alpha(x,y,z)]=0. \tag{2.63}$$

由以上的分析，说明了曲面族(2.57)的包络 S 满足方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z,\alpha)=0,\\ F_\alpha(x,y,z,\alpha)=0.\end{cases} \tag{2.64}$$

---

① 对于曲面 $F(x,y,z)=0$，在曲面上过 P_0 点取一曲线 $\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$，于是有 $F(x(t),y(t),z(t))=0$，两端对 t 取导数得 $F_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=0$ 即 $\{F_x,F_y,F_z\}\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0$. 但上述曲线为曲面上过 P_0 点的任意曲线，故上式中 $\boldsymbol{r}'(t)$ 为曲面上过 P_0 点的任意方向的切向量. 因此 $\{F_x,F_y,F_z\}$ 是曲面在 P_0 点的法线上的一向量.

换言之，对于包络 S 上的每一点 (x,y,z)，可以找到这样的值 α，使四个数 x,y,z,α 满足方程组(2.64).

从方程组(2.64)消去 α，则得到具有下列形式的方程

$$\varphi(x,y,z)=0,$$

这个方程所表示的曲面 S^* 叫做曲面族(2.57)的判别曲面.

我们假定在族中的曲面上的点和在包络上的点都是正常点的情况. 在这种情况下，我们可以证明判别曲面 S^* 就是包络面 S. 判别曲面 S^* 可以这样理解：对于每一个固定的 α，方程组(2.64)代表曲面 S_α 和曲面 $F_\alpha=0$ 的交线 C_α，而判别曲面 S^* 是这些曲线 C_α 所产生的曲面. 因此，S^* 上每一点决定一个 α 值 $\alpha^*(x,y,z)$，而点的坐标以及其所对应的 α^* 值适合(2.64). 但上面已经得到包络 S 上每一点和它所对应的 α 值适合(2.64)，因而包络 S 属于判别曲面 S^*.

下面再证明判别曲面 S^* 属于包络 S.

由于判别曲面上每一个点都在族中某一曲面上，因此它的坐标对 α 的某个值满足方程

$$F(x,y,z,\alpha)=0,$$

我们在判别曲面上过一点 P 任取一条曲线 (C)：$\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$，代入方程组(2.64)的第一式，然后关于 t 求导数，则有

$$F_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+F_\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=0.$$

但根据方程组(2.64)的第二式，$F_\alpha=0$，所以

$$F_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=0,$$

这就是说，在 P 点 S_α 的法线和 S^* 上曲线 (C) 的切向量垂直. 但 (C) 为 S^* 上经过 P 点的任意曲线，由此可知，S_α 与 S^* 在 P 相切. 这说明了 S^* 的点也是 S 的点，即 S^* 属于包络 S. 这样，我们证明了 S^* 就是 $\{S_\alpha\}$ 的包络 S.

包络 S 与族中的曲面 S_α 相切的曲线称为**特征线**，因而当 α 固定时，(2.64)为特征线的方程，特征线的轨迹就是包络. 这就是说族中每一曲面沿特征线切于包络.

我们把这些理论应用于单参数的平面族，有以下命题：

命题2 一个曲面为可展曲面的充分必要条件是此曲面为单参数平面族的包络.

证明 设单参数平面族的方程为

$$A(\alpha)x+B(\alpha)y+C(\alpha)z+D(\alpha)=0, \tag{2.65}$$

其中 A、B、C、D 是与平面族的参数 α 有关的系数.

我们求出所给平面族中的平面上的特征线. 根据前述理论，为了求出(2.65)的包络，除方程(2.65)以外还必须把(2.65)左端对参数 α 微分而得方程

$$A'(\alpha)x+B'(\alpha)y+C'(\alpha)z+D'(\alpha)=0, \tag{2.66}$$

(2.65)和(2.66)联立

$$\begin{cases}A(\alpha)x+B(\alpha)y+C(\alpha)z+D(\alpha)=0,\\A'(\alpha)x+B'(\alpha)y+C'(\alpha)z+D'(\alpha)=0.\end{cases} \tag{2.67}$$

则方程组(2.67)在族中的平面上决定一条直线，这就是特征线. 而包络是这些直线——特征线的轨迹，即包络为直纹面.

以下再证明此包络面不仅是直纹面而且还是可展曲面.

由于包络面沿特征线(即沿它的直母线)与族中曲面(即族(2.65)中的某一平面)相切(如图 2－27)，所以此平面是直母线上所有点的公共切平面. 因此按可展曲面的定义，这个包络面是可展曲面.

反之，我们证明每一可展曲面是某一单参数平面族的包络.

由于可展曲面的直母线族与单参数有关，而且经过给定的母线，可引惟一的切平面，因此所有切于可展曲面的切平面族是仅与一个参数有关(而任意曲面的切平面族与两个参数有关)，这就是说可展曲面在它的每一点处切于它的单参数切平面族中的某一平面. 这就表示它是这个平面族的包络.

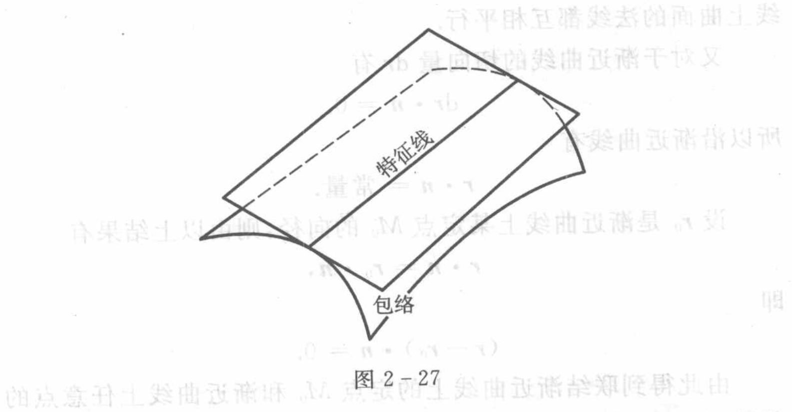


图 2－27

在§4.1中,我们通过计算得到可展曲面的高斯曲率等于零.现在我们再从理论上证明以下命题:

命题 3 一个曲面为可展曲面的充分必要条件是它的高斯曲率恒等于零.

证明 如果曲面是可展的,则沿同一直母线的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 不变,即 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}$,零向量与任意另外的向量共线,因此有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n} \mathbin{/\!/} \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

根据罗德里格斯定理,沿直母线的方向是主方向,并且主曲率 $k_1=0$(或 $k_2=0$),于是

$$K = k_1 k_2 \equiv 0.$$

反之,如果 $K\equiv 0$,则 $K=k_1k_2\equiv 0$. 设 $k_2=0$,这时对应它的方向是渐近方向也是主方向,所以这一族渐近曲线也是曲率线.

根据罗德里格斯定理沿渐近曲线有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n} = -k_2\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

因而

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0},$$

即

$$\boldsymbol{n} = \text{常向量}.$$

这说明单位法向量沿渐近曲线保持常向量. 因此,在所有渐近曲

线上曲面的法线都互相平行.

又对于渐近曲线的切向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

所以沿渐近曲线有

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=\text{常量}.$$

设 $\boldsymbol{r}_0$ 是渐近曲线上某定点 M_0 的向径,则由以上结果有

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{n},$$

即

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

由此得到联结渐近曲线上的定点 M_0 和渐近曲线上任意点的向量 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 垂直于 $\boldsymbol{n}$,因而必在点 M_0 的切平面上,所以渐近曲线的所有点都在点 M_0 的切平面上.

于是,这个包含渐近曲线而且垂直于沿它的常法向量 $\boldsymbol{n}$ 的平面,就是渐近曲线所有点的切平面. 换句话说,对同一条渐近曲线上的点,其切平面是同一个. 由此可见,曲面是一个单参数平面族的包络面,因而是可展曲面.

以下我们再证明一个命题,它刻画了任何曲面上曲率线的特征.

命题 4 曲面上的曲线是曲率线的充分必要条件是沿此曲线的曲面的法线组成一可展曲面.

证明 设曲面上的曲线 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(s)$ 是曲率线,则根据罗德里格斯定理可知

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}=-k_1\mathrm{d}\boldsymbol{a},$$

即

$$\dot{\boldsymbol{n}}(s)=-k_1(s)\dot{\boldsymbol{a}}(s),$$

其中 $k_1(s)$ 为对应的主曲率. 由此得出

$$\dot{\boldsymbol{n}}\,/\!/\,\dot{\boldsymbol{a}},$$

所以有

$$(\dot{\boldsymbol{a}},\boldsymbol{n},\dot{\boldsymbol{n}})=0.$$

因而沿此曲线，曲面的法线组成的曲面

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{n}$$

是可展曲面.

反之，设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(s)$ 是曲面上一曲线. 曲面沿此曲线的法线构成一可展曲面

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{n},$$

于是有

$$(\dot{\boldsymbol{a}},\boldsymbol{n},\dot{\boldsymbol{n}})=0.$$

由于 $\boldsymbol{n}$ 是单位向量，所以 $\boldsymbol{n}\perp\dot{\boldsymbol{n}}$. 而且 $\dot{\boldsymbol{a}}$ 是曲面的切向量，因而 $\dot{\boldsymbol{a}}\perp\boldsymbol{n}$. 由此可得

$$\dot{\boldsymbol{a}}\,/\!/\,\dot{\boldsymbol{n}}\quad\text{或}\quad \mathrm{d}\boldsymbol{a}\,/\!/\,\mathrm{d}\boldsymbol{n}.$$

根据罗德里格斯定理，$\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 是主方向. 因此曲线 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(s)$ 是曲面的曲率线.

可展曲面的特征之一是它可以与平面成等距对应. 我们以下证明：

命题 5 可展曲面可以与平面成等距对应(简称展为平面).

证明 在直角坐标系(x,y)里，平面的第一基本形式是

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2,$$

而在极坐标系(ρ,θ)里，由上式通过变换

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,$$

可得第一基本形式是

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}\rho^2+\rho^2\mathrm{d}\theta^2.$$

我们首先考虑柱面. 柱面方程可表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(s)+v\boldsymbol{b},$$

其中 $\boldsymbol{b}$ 为沿柱面母线的单位常向量，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(s)$ 是与柱面母线正交的一条曲线，s 是它的弧长.

于是

$$\boldsymbol{r}_s=\dot{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{b},$$

$$E=\boldsymbol{r}_s\cdot\boldsymbol{r}_s=\boldsymbol{\alpha}^2=1,F=\boldsymbol{r}_s\cdot\boldsymbol{r}_v=0,G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{b}^2=1,$$

而第一基本形式为

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}s^2 + \mathrm{d}v^2.$$

这与上述平面的第一基本形式有相同的形式,因此柱面可以展为平面.

其次考虑锥面. 锥面方程可表示为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_0 + v\boldsymbol{b}(s),$$

其中 $\boldsymbol{a}_0$ 为常向量,$\boldsymbol{b}(s)$为锥面母线上单位向量,而 s 是单位球面曲线 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}(s)$的弧长,则有

$$\boldsymbol{b}^2 = 1,\ \boldsymbol{b}\cdot\dot{\boldsymbol{b}} = 0,\ \dot{\boldsymbol{b}}^2 = 1.$$

于是

$$\boldsymbol{r}_s = v\dot{\boldsymbol{b}},\ \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{b},$$

$$E = \boldsymbol{r}_s\cdot\boldsymbol{r}_s = v^2,\ F = \boldsymbol{r}_s\cdot\boldsymbol{r}_v = 0,\ G = \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v = 1,$$

而第一基本形式为

$$\mathrm{I} = v^2\mathrm{d}s^2 + \mathrm{d}v^2,$$

这与上述平面的第一基本形式有相同的形式,因此锥面可以展为平面.

最后考虑切线曲面

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(s) + v\boldsymbol{\alpha}(s),$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}(s)$为曲线 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(s)$的切向量 $\boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{a}}(s)$, s 为曲线 $\boldsymbol{a}(s)$的弧长.

于是

$$\boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{\alpha} + vk\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{\alpha}(s),$$

$$E = \boldsymbol{r}_s\cdot\boldsymbol{r}_s = 1 + v^2k^2,\ F = \boldsymbol{r}_s\cdot\boldsymbol{r}_v = 1,\ G = \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v = 1,$$

而第一基本形式为

$$\mathrm{I} = (1 + v^2k^2)\mathrm{d}s^2 + 2\mathrm{d}s\mathrm{d}v + \mathrm{d}v^2.$$

从这里可以看到第一基本形式的表达式中只出现了曲线的曲率 k,而没有出现挠率 τ. 因此如果两条曲线具有同一曲率

$$k = k(s),$$

那么即使挠率 τ 不同，它们的切线所构成的切线曲面具有相同的第一基本形式，因而是等距的．但是对于给定的曲率与挠率为

$$k = k(s),\ \tau = \lambda\tau(s)\ (0 \leqslant \lambda \leqslant 1),$$

则由曲线论的基本定理，除了空间的位置外，完全确定一条曲线 (C)．当 λ 从 1 连续变动到 0 时，即得一个连续族的曲线 $\{C_\lambda\}$．这些曲线的切线曲面也变动，但是第一基本形式保持不变，所有这些切线曲面是等距的．当 $\lambda=0$ 时挠率 $\tau=0$，此时曲线变为平面曲线，由于平面曲线的切线仍然在此平面上，因此这时的切线曲面就是平面曲线所在的平面，而第一基本形式保持不变，因此切线曲面也可展为平面．

以上证明了可展曲面的三种类型都可以展为平面，即命题得证．

这里需要指出的是上述命题中都是指曲面和平面的一部分而言的．

4.3 线汇

线汇是直纹面的推广，直纹面是单参直线族，而线汇则是两个参数 (u,v) 的直线族，它的方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u,v)+\lambda\boldsymbol{b}(u,v),$$

其中，我们取 $|\boldsymbol{b}|=1$，λ 是线汇中每一条直线 $(u=u_0,v=v_0)$ 上的参数。

方程

$$u=u(v)$$

确定了线汇中的一个直纹面：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u(v),v)+\lambda\boldsymbol{b}(u(v),v),$$

这个直纹面为可展曲面的必要和充分的条件是

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\mathrm{d}\boldsymbol{b})=0,$$

这是一个关于 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ 的二次方程

$$Adu^2+Bdudv+Cdv^2=0,$$

其中

$$A=\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial u},B=\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial v}+\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial u},C=\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial v}.$$

所以

$$\frac{du}{dv}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$$

这两个微分方程的解

$$u=u_1(v,c_1)\quad u=u_2(v,c_2)$$

确定了线汇中两族可展曲面，其中每一族可展曲面的腰曲线构成一个曲面，称为线汇的**焦曲面**. 我们把这两个焦曲面分别记成 Σ 和 Σ'.

注意：线汇中每一条直线都是上述两族可展曲面的腰曲线构成的焦曲面的切线，也就是这两个焦曲面的公切线，这说明：线汇中每一条直线 l 是两个焦曲面 Σ 和 Σ' 的公切线，于是，线汇中每一条直线 l 确定了焦曲面 Σ 和 Σ' 的切点之间的一个对应关系：

$$l:\Sigma\longrightarrow\Sigma',$$

也就是说：对于焦曲面 Σ 上每一个点 P，有一条线汇中的直线 l，它与 Σ 相切于 P，同时与 Σ' 相切于 P'，线汇中每一条直线 l 使焦曲面 Σ 上的点 P 对应于另一个焦曲面 Σ' 的点 P'，使得过点 P 和 P' 的直线正好是 Σ 和 Σ' 的公切线 l.

习　题

1. 证明曲面 $\boldsymbol{r}=\left\{u^2+\frac{1}{3}v,\ 2u^3+uv,\ u^4+\frac{2}{3}u^2v\right\}$ 是可展曲面.

2. 证明曲面

$$\boldsymbol{r}=\{\cos v-(u+v)\sin v,\ \sin v+(u+v)\cos v,\ u+2v\}$$

是可展曲面.

3. 证明正螺面 $\boldsymbol{r}=\{v\cos u,\ v\sin u,\ au+b\}$ 不是可展曲面.

4. 证明挠曲线的主法线曲面与副法线曲面都不是可展曲面.

5. 求平面族 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-z\sin\alpha=1$ 的包络.

6. 求平面族 $a^2x+2ay+2z=2a$ 的包络.

7. 证明柱面、锥面、任意空间曲线的切线面是可展曲面.

8. 证明 $\boldsymbol{r}_{uu}=\boldsymbol{r}_{uv}=\boldsymbol{0}$的曲面 S: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$是柱面.

§5 曲面论的基本定理

根据以上几节的讨论,我们知道曲面

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$$

的许多性质由它的第一和第二基本形式所确定. 在这一节里,我们要讨论一个反问题:给出变量 u、v 的两个二次微分形式

$$E(u,v)\mathrm{d}u^2+2F(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G(u,v)\mathrm{d}v^2,$$

$$L(u,v)\mathrm{d}u^2+2M(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N(u,v)\mathrm{d}v^2,$$

我们能不能确定一个曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$,它的第一和第二基本形式正好就是上面所给出的两个二次微分形式.

一般来说,这个反问题不可能有解,因为确定一个曲面只需三个函数 $x(u,v)$,$y(u,v)$和 $z(u,v)$,但是给出两个二次微分形式等于给出六个函数 $E(u,v)$, $F(u,v)$, $G(u,v)$和 $L(u,v)$, $M(u,v)$, $N(u,v)$,条件太多了. 除非这六个系数函数之间只有三个是独立的,也就是说,这六个函数间有三个关系式. 这一节的目的就是要寻找这三个关系式,称为**高斯-科达齐-迈因纳尔迪(Gauss-Codazzi-Mainardi)公式**. 并且将证明这样一个定理:给出两个二次微分形式,如果它们满足高斯-科达齐-迈因纳尔迪条件时,则存在一个曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$,它的第一和第二基本形式正好就是给定的两个二次微分形式.

为了把一些式子表达得更有规律性些,在这一节里我们将采用以下新的符号. 以后我们将同时采用这一套符号和以前采用的符号. 记

$$u = u^1, v = u^2,$$

$$\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{r}_2,$$

$$\boldsymbol{r}_{uu} = \boldsymbol{r}_{11}, \boldsymbol{r}_{uv} = \boldsymbol{r}_{12}, \boldsymbol{r}_{vu} = \boldsymbol{r}_{21}, \boldsymbol{r}_{vv} = \boldsymbol{r}_{22},$$

$$E = g_{11} = \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_1, F = g_{12} = g_{21} = \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2,$$

$$G = g_{22} = \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_2,$$

$$EG - F^2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g,$$

$$L = L_{11} = \boldsymbol{r}_{11} \cdot \boldsymbol{n}, M = L_{12} = L_{21} = \boldsymbol{r}_{12} \cdot \boldsymbol{n},$$

$$N = L_{22} = \boldsymbol{r}_{22} \cdot \boldsymbol{n},$$

$$\sum_{i=1}^{2} = \sum_{i}, \sum_{i,j} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}$$

等等. 此外注意:

$$\sum_{\alpha} a^{\alpha} b_{\alpha} = \sum_{\beta} a^{\beta} b_{\beta}, \sum_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\delta} a^{\gamma\delta} b_{\gamma\delta} \text{ 等.}$$

5.1 曲面的基本方程和克里斯托费尔(Christoffel)符号

给出一个 C^3 类曲面 S:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2),$$

它确定了向量

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}, \boldsymbol{r}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2}, \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{\sqrt{g}},$$

对这三个向量再求导数,我们得到一个类似于曲线论中的伏雷内公式的公式. 命

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{ij} = \sum_{k} \Gamma_{ij}^{k} \boldsymbol{r}_k + \lambda_{ij} \boldsymbol{n}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i,j = 1,2. \\ \boldsymbol{n}_i = \sum_{j} \mu_i^j \boldsymbol{r}_j, \end{cases} \tag{2.68}$$

我们希望确定这些式子的系数 Γ_{ij}^{k}, λ_{ij} 和 $\mu_i^j (i,j,k=1,2)$.

把(2.68)的第一式点乘 $\boldsymbol{n}$,注意 $\boldsymbol{r}_k \cdot \boldsymbol{n} = 0$, $\boldsymbol{r}_{ij} \cdot \boldsymbol{n} = L_{ij}$,因

此有

$$\lambda_{ij} = \boldsymbol{r}_{ij} \cdot \boldsymbol{n} = L_{ij}.$$

因为 $g_{ij} = \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j$，对此式求导数得

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \boldsymbol{r}_{il} \cdot \boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_{jl},$$

同理

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} = \boldsymbol{r}_{ij} \cdot \boldsymbol{r}_l + \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_{lj},$$

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} = \boldsymbol{r}_{ji} \cdot \boldsymbol{r}_l + \boldsymbol{r}_j \cdot \boldsymbol{r}_{li}.$$

由于 $\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_{ji}$，所以

$$[ij,l] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right) = \boldsymbol{r}_{ij} \cdot \boldsymbol{r}_l = \sum_k \Gamma_{ij}^k g_{kl}. \tag{2.69}$$

命 (g^{ij}) 是 (g_{ij}) 的逆矩阵，即

$$\sum_k g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2.$$

从(2.69)可以解出系数 Γ_{ij}^k 如下：

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_l g^{kl}[ij,l] = \sum_l \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right),$$

$$i, j, l = 1,2.$$

如果采用过去的符号，则

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g} = \frac{G}{EG - F^2}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g} = \frac{E}{EG - F^2},$$

$$g^{12} = g^{21} = \frac{-g_{12}}{g} = \frac{-F}{EG - F^2},$$

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} = \frac{\partial E}{\partial u} = E_u, \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = \frac{\partial E}{\partial v} = E_v,$$

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} = \frac{\partial F}{\partial u} = F_u, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} = \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} = \frac{\partial F}{\partial v} = F_v,$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}=\frac{\partial G}{\partial u}=G_u,\ \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}=\frac{\partial G}{\partial v}=G_v.$$

于是得到六个系数 Γ_{ij}^k 如下：

$$\Gamma_{11}^1=\frac{GE_u-F(2F_u-E_v)}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma_{11}^2=\frac{E(2F_u-E_v)-FE_u}{2(EG-F^2)}$$

$$\Gamma_{12}^1=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma_{12}^2=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)},$$

$$\Gamma_{22}^1=\frac{G(2F_v-G_u)-FG_v}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma_{22}^2=\frac{EG_v-F(2F_v-G_u)}{2(EG-F^2)}.$$

Γ_{ij}^k 称为**第二类克里斯托费尔符号**，也可以写成 $\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}$，此外还有**第一类克里斯托费尔符号**，即 $[ij,l]$.

例 对于曲面上的正交坐标网来说，$F=0$，这时

$$\Gamma_{11}^1=\frac{E_u}{2E},\ \Gamma_{11}^2=-\frac{E_v}{2G},\ \Gamma_{12}^1=\frac{E_v}{2E},$$

$$\Gamma_{12}^2=\frac{G_u}{2G},\ \Gamma_{22}^1=-\frac{G_u}{2E},\ \Gamma_{22}^2=\frac{G_v}{2G}.$$

我们再来确定(2.68)的第二式中的系数 μ_i^j. 用 $\boldsymbol{r}_k$ 去点乘这式子得到

$$-L_{ik}=\boldsymbol{n}_i\cdot\boldsymbol{r}_k=\sum_j\mu_i^j g_{jk},\ i,\ k=1,2,$$

因此

$$\mu_i^j=-\sum_k g^{jk}L_{ik}.$$

用过去的符号表示得

$$\mu_1^1=\frac{-LG+MF}{EG-F^2},\quad \mu_1^2=\frac{LF-ME}{EG-F^2},$$

$$\mu_2^1=\frac{NF-MG}{EG-F^2},\quad \mu_2^2=\frac{-NE+MF}{EG-F^2}.$$

对于曲面上的正交坐标网有

$$\mu_1^1=-\frac{L}{E},\ \mu_1^2=-\frac{M}{G},$$

$$\mu_2^1 = -\frac{M}{E},\ \mu_2^2 = -\frac{N}{G}.$$

于是我们得到 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的导向量公式如下：

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{r}_k + L_{ij}\boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{n}_i = -\sum_{j,k} L_{ik} g^{kj} \boldsymbol{r}_j, \end{cases} \quad i,\ j = 1,2, \tag{2.68$'$}$$

上式称为曲面的基本方程，其中第一式称为高斯方程，第二式称为魏因加尔吞(Weingarten)方程.

5.2 曲面的黎曼(Riemann)曲率张量和高斯-科达齐-迈因纳尔迪(Gauss-Codazzi-Mainardi)公式

设 Γ_{ij}^k 是曲面的克里斯托费尔符号，我们定义曲面的黎曼曲率张量如下：

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} + \sum_p (\Gamma_{ij}^p \Gamma_{pk}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{pj}^l),\ i,\ j,\ k,\ l,\ p = 1,2. \tag{2.70}$$

容易证明黎曼曲率张量满足下列恒等式

$$R_{ijk}^l = -R_{ikj}^l,$$

因此

$$R_{ijj}^l = 0,$$

$$R_{ijk}^l + R_{jki}^l + R_{kij}^l = 0.$$

如果再定义另一种黎曼曲率张量如下：

$$R_{mijk} = \sum_l g_{ml} R_{ijk}^l,\ m,\ i,\ j,\ k = 1,2,$$

则有恒等式

$$R_{mijk} = -R_{imjk},\ R_{mmjk} = 0,$$

$$R_{mijk} = -R_{mikj},\ R_{mijj} = 0,$$

$$R_{mijk} = R_{jkmi},$$

$$R_{mijk} + R_{mjki} + R_{mkij} = 0.$$

根据以上恒等式，黎曼曲率张量 R_{mijk} 的 16 个分量中，只有一个是

独立的，即 R_{1212}. 下面我们要指出：它就是曲面的高斯曲率 K. 这就是为什么把 R^l_{ijk} 和 R_{mijk} 叫做曲率张量的原因. 应该特别指出的是黎曼曲率张量只与曲面的第一基本形式有关，因此是曲面的内蕴量. 它经过等距变换后保持不变.

现在我们再对 §5.1 中推出的曲面的基本方程求微商，于是得到：

命题 1° 高斯公式

$$R_{mijk} = L_{ij}L_{mk} - L_{ik}L_{mj};$$

2° 科达齐-迈因纳尔迪公式

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j} = \sum_l (\Gamma^l_{ik}L_{lj} - \Gamma^l_{ij}L_{lk}).$$

证明 对(2.68)′式的高斯方程求导数，得

$$(\boldsymbol{r}_{ij})_k = \sum_l \left(\frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial u^k}\boldsymbol{r}_l + \Gamma^l_{ij}\boldsymbol{r}_{lk}\right) + \frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k}\boldsymbol{n} + L_{ij}\boldsymbol{n}_k,$$

再把(2.68)′式代入上式，得

$$\boldsymbol{r}_{ijk} = \sum_l \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial u^k}\boldsymbol{r}_l + \sum_{l,m}\Gamma^l_{ij}\Gamma^m_{lk}\boldsymbol{r}_m + \sum_l \Gamma^l_{ij}L_{lk}\boldsymbol{n} +$$

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k}\boldsymbol{n} - \sum_{m,l} L_{ij}g^{lm}L_{mk}\boldsymbol{r}_l,$$

类似地

$$\boldsymbol{r}_{ikj} = \sum_l \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial u^j}\boldsymbol{r}_l + \sum_{l,m}\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lj}\boldsymbol{r}_m + \sum_l \Gamma^l_{ik}L_{lj}\boldsymbol{n} +$$

$$\frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j}\boldsymbol{n} - \sum_{m,l} L_{ik}g^{lm}L_{mj}\boldsymbol{r}_l,$$

因为曲面是 C^3 类的，所以

$$\boldsymbol{r}_{ijk} = \frac{\partial^3 \boldsymbol{r}}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} = \frac{\partial^3 \boldsymbol{r}}{\partial u^i \partial u^k \partial u^j} = \boldsymbol{r}_{ikj},$$

把 $\boldsymbol{r}_{ijk}$ 和 $\boldsymbol{r}_{ikj}$ 的式子分别代入上式两边，由于 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{n}$ 是线性无关的向量，所以比较等式两边 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的系数，我们得到

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial u^j} + \sum_p (\Gamma^p_{ij}\Gamma^l_{pk} - \Gamma^p_{ik}\Gamma^l_{pj})$$

$$= \sum_m g^{lm}(L_{ij}L_{mk} - L_{ik}L_{mj}),$$

即

$$R_{mijk} = L_{ij}L_{mk} - L_{ik}L_{mj}, \ m, i, j, k, p = 1,2,$$

和

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j} = \sum_l (\Gamma^l_{ik}L_{lj} - \Gamma^l_{ij}L_{lk}), \ i, j, k = 1,2.$$

命题证毕.

注意,高斯公式中只有一个是独立的,即

$$R_{1212} = L_{12}L_{12} - L_{11}L_{22} = -(LN - M^2) = -K(EG - F^2),$$

所以有

$$K = \frac{-R_{1212}}{g}.$$

于是我们得到了高斯的著名的定理:

定理 曲面的高斯曲率是内蕴量.

这定理说明了当一个曲面经过等距变换变成另外一个曲面的时候,它的高斯曲率不改变. 特别地,高斯曲率不恒等于零的曲面一定不能够经过等距变换变到平面或平面的一部分.

下面给出高斯曲率的具体表达式. 我们还是根据它的原来的定义直接去计算它.

注意

$$L = \frac{(\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, M = \frac{(\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$N = \frac{(\boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}},$$

所以

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

$$= \frac{1}{(EG - F^2)^2}[(\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) - (\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)^2]$$

$$
=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v \end{vmatrix}\right]
$$

$$
=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}-\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & E & F \\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & F & G \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & E & F \\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & F & G \end{vmatrix}\right].
$$

由于

$$
\begin{aligned}
(F_{uv}) = (F_u)_v &= ((\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)_u)_v = (\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v+\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{vu})_v \\
&= \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}+\boldsymbol{r}_{uuv}\cdot\boldsymbol{r}_v+\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uvv}+\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{2}E_{vv}=\left(\frac{1}{2}E_v\right)_v=(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uv})_v=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uvv}+\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv},
$$

$$
\frac{1}{2}G_{uu}=\left(\frac{1}{2}G_u\right)_u=(\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{vu})_u=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{vuu}+\boldsymbol{r}_{vu}\cdot\boldsymbol{r}_{vu},
$$

所以

$$
F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu}=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}-\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}.
$$

于是得到所求的公式

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[\begin{vmatrix} F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}\right].$$

实例：对于曲面上的正交坐标网来说有 $F=0$，所以

$$K=\frac{-1}{\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u+\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v\right].$$

下面再给出在一般坐标网下科达齐-迈因纳尔迪公式的具体表达式，它们中间只有两个是独立的，把克里斯托费尔符号代入这两个式子得到

$$(EG-2FF+GE)(L_v-M_u)-(EN-2FM+GL)(E_v-F_u)+\begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix}=0,$$

$$(EG-2FF+GE)(M_v-N_u)-(EN-2FM+GL)(F_v-G_u)+\begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix}=0.$$

5.3 曲面论的基本定理

基本定理 设

$$\mathrm{I} = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j,$$

$$\mathrm{II} = L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2 = \sum_{i,j=1}^{2} L_{ij}\,\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$$

是给定的两个二次形式,其中 I 是正定的. 若 I 和 II 的系数 g_{ij} 和 L_{ij} 对称且满足高斯-科达齐-迈因纳尔迪公式,则除了空间中的位置差别外,惟一地存在一个曲面,使得 I 和 II 分别为此曲面的第一和第二基本形式.

证明 由给定的两个二次形式的系数 g_{ij} 和 L_{ij},考虑由 g_{ij} 决定的 g^{ij}, Γ_{ij}^k 为系数,以 $\boldsymbol{r}(u^1, u^2)$, $\boldsymbol{r}_1(u^1, u^2)$, $\boldsymbol{r}_2(u^1, u^2)$ 和 $\boldsymbol{n}(u^1, u^2)$ 为未知函数的一阶线性偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i} = \boldsymbol{r}_i, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial u^j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{r}_k + L_{ij}\boldsymbol{n}, \quad i,\ j = 1,2. \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^i} = -\displaystyle\sum_{j,k=1}^{2} L_{ij} g^{jk} \boldsymbol{r}_k, \end{cases} \tag{2.71}$$

根据偏微分方程论的解的存在定理可知,这个偏微分方程组的完全可积条件是

$$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_{ji}, \tag{2.72}$$

$$\left.\begin{aligned} (\boldsymbol{r}_i)_{jk} &= (\boldsymbol{r}_i)_{kj}, \\ (\boldsymbol{n})_{ij} &= (\boldsymbol{n})_{ji}, \end{aligned}\right\} \tag{2.73}$$

其中(2.72)式由于 g_{ij} 和 L_{ij} 是对称的,所以 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$,从而 $\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_{ji}$;而(2.73)则由上一小节的讨论可知,这些可积条件恰好就是高斯-科达齐-迈因纳尔迪公式. 因此对任意取定的(u_0^1, u_0^2),给定一初

始右手标架：

$$\{\boldsymbol{r}_0;(\boldsymbol{r}_1)_0,(\boldsymbol{r}_2)_0,\boldsymbol{n}_0\},$$

其中 $\boldsymbol{r}_0$ 是任意的，$(\boldsymbol{r}_1)_0,(\boldsymbol{r}_2)_0,\boldsymbol{n}_0$ 满足条件：

$$\left.\begin{aligned}&(\boldsymbol{r}_i)_0\cdot(\boldsymbol{r}_j)_0=g_{ij}(u_0^1,u_0^2),\\&\boldsymbol{n}_0\cdot(\boldsymbol{r}_i)_0=0,\\&\boldsymbol{n}_0^2=1.\end{aligned}\right\}\tag{2.74}$$

又因为是右手标架，所以

$$((\boldsymbol{r}_1)_0,(\boldsymbol{r}_2)_0,\boldsymbol{n}_0)>0.$$

此时方程组(2.71)有惟一一组解：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2),\\&\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(u^1,u^2),\\&\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(u^1,u^2),\end{aligned}\tag{2.75}$$

它们满足初始条件：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}(u_0^1,u_0^2)=\boldsymbol{r}_0,\\&\boldsymbol{r}_i(u_0^1,u_0^2)=(\boldsymbol{r}_i)_0,\\&\boldsymbol{n}(u_0^1,u_0^2)=\boldsymbol{n}_0.\end{aligned}$$

以下证明由此得到的曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 就是满足定理要求的曲面.

首先证明，在曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 上的任一点，$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{n}$ 构成一右手标架，且

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j=g_{ij},\\&\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_i=0,\\&\boldsymbol{n}^2=1.\end{aligned}$$

为此我们对任意的 u^1 和 u^2 求出 $\boldsymbol{r}_1^2,\boldsymbol{r}_2^2,\boldsymbol{n}^2,\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_1$ 的值，利用方程组(2.71)可得下列 12 个等式：

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{r}_1^2)}{\partial u^1}=\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial u^1}=\Gamma_{11}^1\boldsymbol{r}_1^2+\Gamma_{11}^2\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2+L_{11}\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n},\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{r}_1^2)}{\partial u^2}=\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial u^2}=\Gamma_{12}^1\boldsymbol{r}_1^2+\Gamma_{12}^2\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2+L_{12}\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n},\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{r}_2^2)}{\partial u^1}=\boldsymbol{r}_2\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_2}{\partial u^1}=\Gamma_{12}^1\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2+\Gamma_{12}^2\boldsymbol{r}_2^2+L_{12}\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n},\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{r}_2^2)}{\partial u^2}=\boldsymbol{r}_2\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_2}{\partial u^2}=\Gamma_{22}^1\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2+\Gamma_{22}^2\boldsymbol{r}_2^2+L_{22}\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n},\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{n}^2)}{\partial u^1}=\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial u^1}=-\sum_{j=1}^{2}(L_{1j}g^{j1}\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n}+L_{1j}g^{j2}\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n}),\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{n}^2)}{\partial u^2}=\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial u^2}=-\sum_{j=1}^{2}(L_{2j}g^{j1}\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n}+L_{2j}g^{j2}\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n}),\\
&\cdots\cdots\\
&\frac{\partial(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_1)}{\partial u^2}=\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial u^2}+\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial u^2}\cdot\boldsymbol{r}_1=\Gamma_{12}^1\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n}+\Gamma_{12}^2\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n}+L_{12}\boldsymbol{n}^2-\\
&\qquad\qquad\sum_{j=1}^{2}(L_{2j}g^{j1}\boldsymbol{r}_1^2+L_{2j}g^{j2}\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2).
\end{aligned}
\right.
\tag{2.76}
$$

上述 12 个等式可以看做以 $\boldsymbol{r}_1^2$，$\boldsymbol{r}_2^2$，$\boldsymbol{n}^2$，$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_1$ 为未知函数的一阶线性偏微分方程组. 因为 g_{ij} 及 L_{ij} 满足高斯-柯达齐-迈因纳尔迪公式，可以验证此方程组是完全可积的. 如果用 g_{11}，g_{22}，1，g_{12}，0，0 分别替代 $\boldsymbol{r}_1^2$，$\boldsymbol{r}_2^2$，$\boldsymbol{n}^2$，$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_1$，则不难验证它们满足方程组(2.76). 例如，我们检验第一个方程

$$
\frac{1}{2}\frac{\partial(g_{11})}{\partial u^1}=\Gamma_{11}^1 g_{11}+\Gamma_{11}^2 g_{12}+L_{11}\cdot 0=\frac{1}{2}\frac{\partial(g_{11})}{\partial u^1},
$$

又如检验方程组(2.76)中最后一个方程

$$
0=\Gamma_{12}^1\cdot 0+\Gamma_{12}^2\cdot 0+L_{12}\cdot 1-\sum_{j=1}^{2}(L_{2j}g^{j1}g_{11}+L_{2j}g^{j2}g_{21})
$$

$$= L_{12} - \sum_{j=1}^{2} (g^{j1} g_{11} + g^{j2} g_{21}) L_{2j}$$

$$= L_{12} - \sum_{j=1}^{2} L_{2j} \delta_1^j = L_{12} - L_{21} = 0.$$

方程组(2.76)的其他方程也可按同法检验. 又因为这些解具有相同的初始值(2.74),因此,由解的惟一性得到

$$\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j = g_{ij},$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_i = 0,$$

$$\boldsymbol{n}^2 = 1.$$

又因为

$$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{n})^2 > 0,$$

所以$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{n})$恒正或恒负,但是在初始点

$$((\boldsymbol{r}_1)_0,\ (\boldsymbol{r}_2)_0,\ \boldsymbol{n}_0) > 0,$$

由解的连续性可知

$$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{n}) > 0.$$

再证明定理所给定的二次形式Ⅰ和Ⅱ分别为此曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2)$的第一和第二基本形式.

由 $\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j = g_{ij}$ 得知 $\text{Ⅰ} = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \mathrm{d}u^i \mathrm{d}u^j$ 是曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2)$的第一基本形式,再由 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_i = 0$, $\boldsymbol{n}^2 = 1$ 得知 $\boldsymbol{n}$ 是此曲面的单位法向量.

又因为

$$\boldsymbol{r}_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{r}_k + L_{ij} \boldsymbol{n},$$

所以

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_{ij} = L_{ij},$$

即 $\text{Ⅱ} = \sum_{i,j=1}^{2} L_{ij} \mathrm{d}u^i \mathrm{d}u^j$ 为曲面的第二基本形式. 这样就证明了适合要求的曲面的存在性.

以下证明：除了空间中的位置差别外，惟一地存在一个曲面以Ⅰ，Ⅱ为其第一，第二基本形式.

假定有两个曲面 S_1 和 S_2 存在，它们有相同的第一和第二基本形式. 在 S_1 和 S_2 上对第一、第二基本形式相同的点取相同的曲纹坐标(u^1,u^2). 在点(u_1^0,u_0^2)各作 S_1，S_2 的标架，则经过适当的刚体运动，可以使曲面 S_1 在点(u_0^1,u_0^2)的标架跟曲面 S_2 在点(u_0^1,u_0^2)的标架重合. 这样的重合是可能的，因为它们有相同的第一类基本量，于是$(\boldsymbol{r}_1)_0$，$(\boldsymbol{r}_2)_0$ 有相同的交角$\left(\arccos\dfrac{F}{\sqrt{EG}}\right)_0$. 假设经过这样的重合后，这两个曲面的方程分别是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2) \quad 和 \quad \boldsymbol{r}=\bar{\boldsymbol{r}}(u^1,u^2).$$

如果取

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1(u^1,u^2),\ \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_2(u^1,u^2),\ \boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(u^1,u^2),$$

或

$$\boldsymbol{r}_1=\bar{\boldsymbol{r}}_1(u^1,u^2),\ \boldsymbol{r}_2=\bar{\boldsymbol{r}}_2(u^1,u^2),\ \boldsymbol{n}=\bar{\boldsymbol{n}}(u^1,u^2),$$

因为 S_1 和 S_2 有相同的第一、二基本形式，因此由 g_{ij}，L_{ij} 作出的方程组(2.71)也是相同的. 因此，上述这两组函数都满足方程组(2.71). 其次，由于这两组函数在点$(u_0^1,\ u_0^2)$满足同样的初始条件：$\{\boldsymbol{r}_0;\ (\boldsymbol{r}_1)_0,\ (\boldsymbol{r}_2)_0,\ \boldsymbol{n}_0\}$. 根据解的惟一性，这两组函数在任意点$(u^1,u^2)$总是恒等的. 因此，对于任意的 u^1，u^2 都有：

$$\boldsymbol{r}(u^1,u^2)=\bar{\boldsymbol{r}}(u^1,u^2),\ \boldsymbol{r}_1(u^1,u^2)=\bar{\boldsymbol{r}}_1(u^1,u^2),$$

$$\boldsymbol{r}_2(u^1,u^2)=\bar{\boldsymbol{r}}_2(u^1,u^2).$$

所以曲面 S_1 和 S_2 除了一个刚体运动外，是完全一致的，即除了空间中的位置差别外，惟一地存在一个曲面以定理给定的两个二次形式为其第一、二基本形式.

习　题

1. 平面上取极坐标系时，第一基本形式为 $ds^2=d\rho^2+\rho^2d\theta^2$. 试计算第二类克氏符号 Γ_{ij}^k.

2. 证明高斯曲率　$K=\det|\mu_i^j|$.

3. 证明平均曲率　$H=-\frac{1}{2}(\mu_1^1+\mu_2^2)$.

4. 求证

$$R_{mijk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial u^i\partial u^k}+\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^m\partial u^j}-\frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial u^i\partial u^j}-\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^m\partial u^k}\right)+\sum_p(\Gamma_{ik}^p\cdot[mj,p]-\Gamma_{ij}^p\cdot[mk,p]).$$

5. 对于 $\mathbf{R}^3$ 中的空间曲面来说

$$R_{ijk}^l=-K(\delta_j^l g_{ik}-\delta_k^l g_{ij}),$$

其中 K 是曲面的高斯曲率.

6. 证明以下公式:

(1) $K=\frac{1}{E}[(\Gamma_{11}^2)_v-(\Gamma_{12}^2)_u+\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2+\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2-(\Gamma_{12}^2)^2]$;

(2) $K=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\Gamma_{11}^2\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\Gamma_{12}^2\right)\right]$;

(3) $K=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\Gamma_{22}^1\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\Gamma_{12}^1\right)\right]$;

(4) 对于曲面上的等温坐标网有 $ds^2=\lambda^2(du^2+dv^2)$,求证:

$$K=-\frac{1}{\lambda^2}[(\ln\lambda)_{uu}+(\ln\lambda)_{vv}];$$

(5) 对于曲面上的半测地坐标网(见§6.3)有 $ds^2=du^2+Gdv^2$,求证:

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

7. 如果曲面的第一基本形式是 $ds^2=\frac{du^2+dv^2}{(u^2+v^2+C)^2}$,计算第二类克里斯托费尔符号.

8. 求证第一基本形式是 $ds^2=\frac{du^2+dv^2}{(u^2+v^2+C)^2}$ 的曲面有常高斯曲率.

9. 求以 $E=1$, $F=0$, $G=1$, $L=-1$, $M=0$, $N=0$ 为第一、第二基本量的曲面.

10. 证明不存在曲面,使 $E=G=1$, $F=0$, $L=1$, $M=0$, $N=-1$.

§6 曲面上的测地线

6.1 曲面上曲线的测地曲率

给出一个曲面 S

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2),$$

(C)是曲面上的一条曲线：

$$u^\alpha = u^\alpha(s), \ \alpha = 1,2,$$

其中 s 是(C)的自然参数.

设 P 是(C)上一点，$\boldsymbol{\alpha}$ 是(C)在 P 点的单位切向量，$\boldsymbol{\beta}$ 是主法向量，$\boldsymbol{\gamma}$ 是副法向量. 再设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 在 P 点的单位法向量，θ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角(如图 2-28)，则曲面 S 在 P 点的切方向 $\boldsymbol{\alpha}$ 上的法曲率是

$$k_n = k\cos\theta = k\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n} = \ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{n}.$$

命 $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{n}$ 是彼此正交的单位向量，并且构成一右手系.

定义 曲线(C)在 P 点的曲率向量 $\ddot{\boldsymbol{r}}=k\boldsymbol{\beta}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 上的投影(也就是在 S 上 P 点的切平面 Π 上的投影)

$$k_g = \ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} = k\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\varepsilon},$$

称为曲线(C)在 P 点的**测地曲率**.

由于

$$k_g = k\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} = k(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{n},\boldsymbol{\alpha}) = k(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{n} = k\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{n},$$

所以有

$$k_g = k\cos(90^\circ\pm\theta) = \pm k\sin\theta.$$

命题 1 $k^2=k_g^2+k_n^2$.

证明 $k_g^2+k_n^2=k^2\sin^2\theta+k^2\cos^2\theta=k^2$.

下面我们给出测地曲率的几何意义.

命题 2 曲面 S 上的曲线(C)，它在 P 点的测地曲率的绝

对值等于(C)在 P 点的切平面 Π 上的正投影曲线(C^*)的曲率.

证明 过(C)的每一点作曲面 S 在点 P 的切平面的垂线，于是得一柱面. 这柱面和 S 在 P 点的切平面的交线就是(C^*). (C)和(C^*)都是柱面上的曲线. 在此柱面上应用梅尼埃定理，取 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为柱面上 P 点的法向量(如图 2－28)，柱面上过 P 点的在(C)的切方向上的法截线是(C^*)，柱面在这方向上的法曲率的绝对值等于(C^*)在 P 点的曲率. 但是这个法曲率又等于(C)在 P 点的曲率 k 乘以 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 夹角的余弦，即 $k\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}$，这就是(C)在 P 点的测地曲率. 命题证毕.

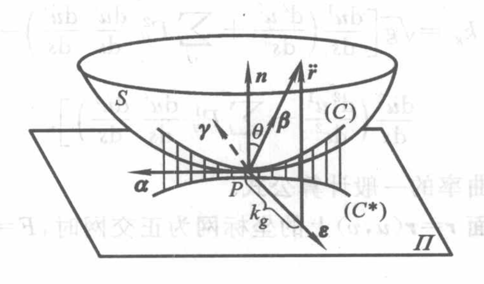


图 2－28

由此可知曲面上的直线其测地曲率为 0.

现在我们来推导测地曲率的计算公式. 由于

$$k_g = k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{n}) = (\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\boldsymbol{n}),$$

而

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \sum_i \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{r}_i,$$

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}} &= \sum_{i,j}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{r}_{ij} + \sum_i \frac{\mathrm{d}^2u^i}{\mathrm{d}s^2}\boldsymbol{r}_i \\ &= \sum_{i,j,k}\Gamma_{ij}^k\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{r}_k + \sum_{i,j}L_{ij}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{n} + \sum_k\frac{\mathrm{d}^2u^k}{\mathrm{d}s^2}\boldsymbol{r}_k,\end{aligned}$$

所以

$$k_g=(\dot{\boldsymbol r},\ddot{\boldsymbol r},\boldsymbol n)=\Big(\sum_i\frac{\mathrm du^i}{\mathrm ds}\boldsymbol r_i,\ \sum_k\Big(\frac{\mathrm d^2u^k}{\mathrm ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{\mathrm du^i}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du^j}{\mathrm ds}\Big)\boldsymbol r_k+$$

$$\sum_{i,j}L_{ij}\frac{\mathrm du^i}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du^j}{\mathrm ds}\boldsymbol n,\ \boldsymbol n\Big)$$

$$=\Big[\frac{\mathrm du^1}{\mathrm ds}\Big(\frac{\mathrm d^2u^2}{\mathrm ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^2\frac{\mathrm du^i}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du^j}{\mathrm ds}\Big)-$$

$$\frac{\mathrm du^2}{\mathrm ds}\Big(\frac{\mathrm d^2u^1}{\mathrm ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^1\frac{\mathrm du^i}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du^j}{\mathrm ds}\Big)\Big](\boldsymbol r_1,\boldsymbol r_2,\boldsymbol n),$$

由此得到

$$k_g=\sqrt g\Big[\frac{\mathrm du^1}{\mathrm ds}\Big(\frac{\mathrm d^2u^2}{\mathrm ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^2\frac{\mathrm du^i}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du^j}{\mathrm ds}\Big)-$$

$$\frac{\mathrm du^2}{\mathrm ds}\Big(\frac{\mathrm d^2u^1}{\mathrm ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^1\frac{\mathrm du^i}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du^j}{\mathrm ds}\Big)\Big].$$

以上是测地曲率的一般计算公式.

对于曲面 $\boldsymbol r=\boldsymbol r(u,v)$ 上的坐标网为正交网时，$F=0$，代入上式中整理后得

$$k_g=\sqrt g\Big[\frac{\mathrm du}{\mathrm ds}\frac{\mathrm d^2v}{\mathrm ds^2}-\frac{\mathrm dv}{\mathrm ds}\frac{\mathrm d^2u}{\mathrm ds^2}-\frac{E_v}{2G}\Big(\frac{\mathrm du}{\mathrm ds}\Big)^3+$$

$$\frac{G_u}{G}\Big(\frac{\mathrm du}{\mathrm ds}\Big)^2\frac{\mathrm dv}{\mathrm ds}+\frac{G_v}{2G}\frac{\mathrm du}{\mathrm ds}\Big(\frac{\mathrm dv}{\mathrm ds}\Big)^2-\frac{E_u}{2E}\Big(\frac{\mathrm du}{\mathrm ds}\Big)^2\frac{\mathrm dv}{\mathrm ds}-$$

$$\frac{E_v}{E}\frac{\mathrm du}{\mathrm ds}\Big(\frac{\mathrm dv}{\mathrm ds}\Big)^2+\frac{G_u}{2E}\Big(\frac{\mathrm dv}{\mathrm ds}\Big)^3\Big].$$

令曲线的切方向与 $\boldsymbol r_u$ 的夹角为 θ，即

$$\frac{\mathrm d\boldsymbol r}{\mathrm ds}=\boldsymbol\alpha=\frac{\boldsymbol r_u}{\sqrt E}\cos\theta+\frac{\boldsymbol r_v}{\sqrt G}\sin\theta,$$

又

$$\frac{\mathrm d\boldsymbol r}{\mathrm ds}=\boldsymbol\alpha=\boldsymbol r_u\frac{\mathrm du}{\mathrm ds}+\boldsymbol r_v\frac{\mathrm dv}{\mathrm ds}.$$

比较上面两式，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{E}},\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}.$$

所以有

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}s^2}=\frac{-\sin\theta}{\sqrt{E}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{E_u\cos^2\theta}{2E^2}-\frac{E_v\cos\theta\sin\theta}{2E\sqrt{EG}},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{G}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{G_u\sin\theta\cos\theta}{2G\sqrt{EG}}-\frac{G_v\sin^2\theta}{2G^2}.$$

由此代入上面 k_g 的表示式中，整理后得

$$\begin{aligned}k_g&=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}\cos\theta+\frac{G_u}{2G\sqrt{E}}\sin\theta\\&=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta,\end{aligned}$$

这个公式称为刘维尔(Liouville)公式．读者试证明刘维尔公式也可写成

$$k_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}+k_{g_u}\cos\theta+k_{g_v}\sin\theta,$$

其中 k_{g_u}、k_{g_v} 分别表示 u—曲线和 v—曲线的测地曲率．

6.2　曲面上的测地线

定义　曲面上的一条曲线，如果它的每一点处的测地曲率为零，则称为**测地线**．

从此定义直接推出：曲面上如果存在直线(如直纹面)，则此直线一定是测地线．

命题 3　曲面上非直线的曲线是测地线的充分必要条件是除了曲率为零的点以外，曲线的主法线重合于曲面的法线．

证明　因为 $k_g=\pm k\sin\theta$，如果 $k\neq0$，则 $k_g=0$ 可以推出 $\theta=0$ 或 π，所以

$$\boldsymbol{\beta} = \pm \boldsymbol{n}.$$

反之，$\theta=0$ 或 π，可以得到 $k_g=0(k\neq 0)$.

推论 如果两曲面沿一曲线相切，并且此曲线是其中一个曲面的测地线，那么它也是另一个曲面的测地线.

证明 因为这两个曲面沿这曲线的法线重合，而此曲线的主法线只有一条. 所以此曲线的主法线同时与两个曲面沿此曲线的法线重合.

实例：球面上的大圆一定是测地线. 这是因为大圆的主法线重合于球面的法线.

下面我们给出曲面上测地线的方程. 由于

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_l = 0,\ l = 1,2,$$

所以有

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{r}_l = 0,$$

或

$$\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}_l = 0.$$

由于

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \sum_k \left(\frac{\mathrm{d}^2 u^k}{\mathrm{d}s^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\right) \boldsymbol{r}_k + \sum_{i,j} L_{ij} \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s} \boldsymbol{n},$$

从而

$$\sum_k g_{kl} \left(\frac{\mathrm{d}^2 u^k}{\mathrm{d}s^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\right) = 0.$$

但是 $g=\det(g_{kl})\neq 0$，于是得到测地线的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 u^k}{\mathrm{d}s^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s} = 0,\ k = 1,2.$$

由上一小节介绍的刘维尔公式也可以得到曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上的坐标网为正交网时，曲面上测地线的方程.

它是一个含三个变量 u、v、θ 和自变量 s 的一阶微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{1}{2\sqrt{G}} \dfrac{\partial \ln E}{\partial v} \cos\theta - \dfrac{1}{2\sqrt{E}} \dfrac{\partial \ln G}{\partial u} \sin\theta, \\ \dfrac{du}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{E}} \cos\theta, \\ \dfrac{dv}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{G}} \sin\theta. \end{cases}$$

给出初始条件

$$u(s_0) = u_0,\ v(s_0) = v_0,\ \theta(s_0) = \theta_0.$$

时，有惟一的解

$$u = u(s),\ v = v(s),\ \theta = \theta(s).$$

例 曲面的第一基本形式为 $\mathrm{I} = E(u)du^2 + G(u)dv^2$.
求证：(1) u—曲线是测地线；

(2) v—曲线为测地线，当且仅当 $G_u(u)=0$.

证明

(1) u—曲线的方程为 $dv=0$. 由

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}} \sin\theta = 0,$$

得到

$$\sin\theta = 0,$$

所以

$$\theta = 0.$$

代入刘维尔公式得

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \ln E}{\partial v} \cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \ln G}{\partial u} \sin\theta = 0,$$

因此得到 u—曲线是测地线.

(2) 若 v—曲线为测地线，由 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 得 $\frac{d\theta}{ds} = 0$，则有

$$0 = 0 + 0 + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \ln G}{\partial u} \sin\theta,$$

即

$$G_u = 0.$$

由上一小节中测地曲率的公式可以推出：满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 u^k}{\mathrm{d}s^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s} = 0, \ k = 1,2$$

的曲线都是测地线，给出初始条件：

$$s = s_0 \text{ 时 } u^k = u_0^k, \ \frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}s}\right)_0,$$

也就是给出曲面上一点和一个切方向. 根据常微分方程理论，存在惟一一条曲线(C)：

$$u^k = u^k(s)$$

过已知点 $\boldsymbol{r}(u^1(s_0), u^2(s_0))$，并且切于给定的方向 $\left(\left(\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s}\right)_0\right)$. 于是得到：

定理 过曲面上任一点，给定一个曲面的切方向，则存在惟一一条测地线切于此方向.

在§6.4中我们将要证明，曲面上的测地线也就是曲面上的短程线.

6.3 曲面上的半测地坐标网

定义 曲面上的一个坐标网，其中一族是测地线，另一族是这族测地线的正交轨线，则这个坐标网称为**半测地坐标网**.

实例：平面上的极坐标系，一族坐标曲线是从原点出发的射线，这是平面上的测地线；另一族坐标曲线是以原点为心的同心圆，它们是上述测地线的正交轨线. 因此半测地坐标网是平面上极坐标网在曲面上的推广.

命题 4 给出曲面上一条曲线，则总存在一个半测地坐标网，它的非测地坐标曲线族中包含给定的一条曲线.

证明 根据§6.2中的定理，过曲面上给定的曲线(C)的每一点，沿着(C)，在切平面上对于垂直于(C)的切线的方向，存在曲面的惟一一条测地线，于是得到与(C)正交的测地曲线族. 然后，再

作这一族测地线的正交轨线，它必定包含了给定的曲线.

现在我们讨论，当在曲面上取半测地坐标网时，曲面的第一基本形式将是怎样的.

首先，由于坐标网是正交的，因而 $F=0$，于是

$$\mathrm{d}s^2 = E\mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2.$$

这时

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E},\quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G},\quad \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G},\quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E},\quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}.$$

设 u—曲线是测地线，则 $v=$ 常数（即 $u^2=$ 常数）应满足测地线方程

$$\ddot{u}^2 + \sum_{j,k}\Gamma_{jk}^2\dot{u}^j\dot{u}^k = 0,$$

所以

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}\frac{E_v}{G} = 0,$$

因而

$$E_v = 0,$$

于是

$$E = \varphi(u) > 0 \quad (E > 0\text{，因为第一基本形式是正定的}).$$

在曲面上引进新的参数 $\bar{u}$，使得

$$\mathrm{d}\bar{u} = \sqrt{\varphi(u)}\,\mathrm{d}u,$$

从而

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\bar{u}^2 + \bar{G}(\bar{u},v)\mathrm{d}v^2.$$

参数 $\bar{u}$ 的几何意义如下：在测地线 $v=$ 常数上，两条正交轨线 $\bar{u}=c_1$ 和 $\bar{u}=c_2$ 之间测地线的长度 $=|c_1-c_2|$，因为在此曲线上有 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\bar{u}^2$，所以 $s=\left|\int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}\bar{u}\right| = |c_1-c_2|$.

设确定半测地坐标网的曲线(C)的参数表示式是 $\bar{u}=u_0$，在曲

面上引进新的参数 $\bar{v}$,使得

$$d\bar{v} = \sqrt{G(u_0, v)}\, dv \ (EG > 0, 因为 E > 0, 所以 G > 0),$$

于是曲面的第一基本形式可以改写成

$$ds^2 = d\bar{u}^2 + \bar{G}(\bar{u}, \bar{v})d\bar{v}^2,$$

其中 $\bar{G}(\bar{u},\bar{v}) = \bar{G}(\bar{u},\ v(\bar{v}))$.

参数 $\bar{v}$ 的几何意义如下：在曲线 (C) $(\bar{u} = u_0)$ 上，$ds^2 = \bar{G}(u_0,\ v)dv^2 = d\bar{v}^2$，所以 $\bar{G}(u_0, \bar{v}) = 1$，并且 (C) 上界于两测地线 $\bar{v} = d_1$ 和 $\bar{v} = d_2$ 之间的弧长 $= |d_2 - d_1|$.

如果我们进一步选 (C) 是一条测地线 $\bar{u} = u_0$，由测地线的方程

$$\ddot{u}^1 + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^1 \dot{u}^j \dot{u}^k = 0$$

知

$$\Gamma_{22}^1 \big|_{u=u_0} = 0,$$

从而

$$\bar{G}_u(u_0, \bar{v}) = 0.$$

小结：取曲面上一条测地线 (C) 为 v—曲线：$u = u_0$，再取与 (C) 正交的测地线族为 u—曲线，另取这测地线族的正交轨线为 v—曲线，则得一半测地坐标网. 对于这个坐标网而言，曲面的第一基本形式可以简化为

$$ds^2 = du^2 + Gdv^2,$$

其中 $G(u,v)$ 满足条件

$$G(u_0, v) = 1,\ G_u(u_0, v) = 0.$$

参数 u 和 v 的几何意义是：在测地线族(即 u—曲线或 v=常数)上，介于 v—曲线 $u = c_1$ 和 $u = c_2$ 之间的弧长为 $|c_2 - c_1|$；在测地线 (C) $(u = u_0)$ 上介于 u—曲线 $v = d_1$ 和 $v = d_2$ 之间的弧长为 $|d_2 - d_1|$.

6.4 曲面上测地线的短程性

利用曲面上的半测地坐标网容易证明测地线的短程性，即在

适当的小范围内联结任意两点的测地线是最短线，所以测地线又称为短程线.

定理 若给出曲面上充分小邻域内的两点 P 和 Q，则过 P,Q 两点在小邻域内的测地线段是联结 P,Q 两点的曲面上的曲线中弧长最短的曲线.

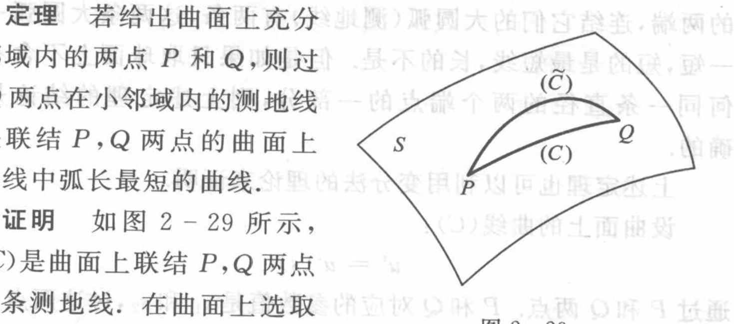


图 2－29

证明 如图 2－29 所示，设(C)是曲面上联结 P,Q 两点的一条测地线. 在曲面上选取半测地坐标网，使曲面上包含(C)在内的一测地线族为 u一曲线，它们的正交轨线为 v一曲线. 根据上述结果，曲面的第一基本形式为

$$ds^2 = du^2 + G dv^2.$$

不妨设曲线(C)的方程为 $v=0$，P 和 Q 的坐标分别为$(u_1, 0)$和$(u_2, 0)$$(u_1<u_2)$，于是，沿测地线$(C)$由 P 到 Q 的弧长为

$$s(\widehat{PQ})\big|_{(C)} = u_2 - u_1.$$

又在这个小邻域内联结 P 和 Q 的任意曲线$(\widetilde{C})$的方程设为

$$v = v(u),$$

于是沿曲线$(\widetilde{C})$，由 P 到 Q 的弧长为

$$s(\widehat{PQ})\big|_{(\widetilde{C})} = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 + Gv'^2}\, du,$$

而

$$\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 + Gv'^2}\, du \geqslant \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1,$$

而且只有当 $v'=0$ 时，上式中的等号成立，但 $v'=0$ 即 $v=$常数(u一曲线)，这表示$(\widetilde{C})$与(C)重合. 这就证明了(C)是联结 P,Q 的最短线.

需要说明的是如果不限制在一充分小的曲面片上，这个定理的结论不一定正确．例如在球面上，如果两点不是一条直径的两端，连结它们的大圆弧（测地线）有两条，这两条大圆弧一长一短，短的是最短线，长的不是．但是如果只取球面上不含有任何同一条直径的两个端点的一部分，则上述定理的结论是正确的．

上述定理也可以利用变分法的理论来证明．

设曲面上的曲线(C)：

$$u^i = u^i(s)$$

通过 P 和 Q 两点．P 和 Q 对应的参数值是 s_1 和 s_2，过这两点邻近(C)的曲线是$(\widetilde{C})$：

$$\widetilde{u}^i = u^i(s) + \varepsilon \omega^i(s),$$

其中 ε 是充分小的量，并且 $w^i(s_1) = w^i(s_2) = 0$.

沿曲线(C)在 PQ 间的弧长为

$$s = \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}s = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{g_{ij} \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}}\, \mathrm{d}s$$

$$\equiv \int_{s_1}^{s_2} \varphi(u^1, u^2, \dot{u}^1, \dot{u}^2)\,\mathrm{d}s.$$

沿曲线$(\widetilde{C})$的 PQ 间的弧长为

$$\widetilde{s}(\varepsilon) = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(u^1 + \varepsilon w^1, u^2 + \varepsilon w^2, \dot{u}^1 + \varepsilon \dot{w}^1, \dot{u}^2 + \varepsilon \dot{w}^2)\,\mathrm{d}s,$$

当 $\varepsilon = 0$ 时，$\widetilde{s}(0) = s$，要使(C)是曲线族$(\widetilde{C})$中弧长最短的曲线，必须有

$$\left.\frac{\mathrm{d}\widetilde{s}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0,$$

即

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^1} w^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} w^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^1} \dot{w}^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^2} \dot{w}^2 \right) \mathrm{d}s = 0,$$

或

$$\sum_i \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^i} w^i + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} \dot{w}^i \right) \mathrm{d}s = 0.$$

根据分部积分

$$\sum_i \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} \dot{w}^i \mathrm{d}s = \sum_i \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} \mathrm{d}(w^i)$$

$$= \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} w^i \Big|_{s_1}^{s_2} - \sum_i \int_{s_1}^{s_2} w^i \mathrm{d}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} \right),$$

但是 $w^i(s_1) = w^i(s_2) = 0$,因此有

$$\sum_i \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} \dot{w}^i \mathrm{d}s = -\int_{s_1}^{s_2} \sum_i w^i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} \right) \mathrm{d}s,$$

于是得

$$\int_{s_1}^{s_2} \sum_i w^i \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} \right) \right] \mathrm{d}s = 0.$$

因为函数 w^i 是任意的,于是得到欧拉(Euler)方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} = 0, \ i = 1, 2.$$

由于

$$\varphi = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} = \frac{\sum_j g_{ij} \dot{u}^j}{\sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}} = \sum_j g_{ij} \dot{u}^j \quad \left(\sum_{i,j} g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j = \frac{\Sigma g_{ij} \mathrm{d}u^i \mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s^2} = 1 \right),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u^i} = \frac{\sum_{j,k} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k}{2\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k.$$

于是欧拉方程简化成

$$\sum_i g_{ij} \ddot{u}^j + \sum_{j,k} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \dot{u}^k \dot{u}^j - \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k = 0.$$

由于

$$\sum_{i} g_{il}\Gamma_{jk}^{l} = [jk,i] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{k}} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^{j}} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^{i}}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{l,j,k} g_{il}\Gamma_{jk}^{l}\dot{u}^{j}\dot{u}^{k} &= \sum_{j,k}\left(\frac{1}{2}\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{k}}\dot{u}^{j}\dot{u}^{k} + \frac{1}{2}\ \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^{j}}\dot{u}^{j}\dot{u}^{k} - \frac{1}{2}\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^{i}}\dot{u}^{j}\dot{u}^{k}\right) \\ &= \sum_{j,k}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{k}}\dot{u}^{j}\dot{u}^{k} - \frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^{i}}\dot{u}^{j}\dot{u}^{k}.\end{aligned}$$

因此欧拉方程又可以写成

$$\sum_{l} g_{il}\left(\ddot{u}^{l} + \sum_{j,k}\Gamma_{jk}^{l}\dot{u}^{j}\dot{u}^{k}\right) = 0,$$

因为 $g = \det(g_{il}) \neq 0$,上式等价于

$$\ddot{u}^{l} + \sum_{j,k}\Gamma_{jk}^{l}\dot{u}^{j}\dot{u}^{k} = 0,\ l = 1,2,$$

这就是测地线方程,所以短程线(C)就是测地线.

6.5 高斯-波涅(Gauss-Bonnet)公式

在平面几何中我们知道三角形的三内角之和为 180°,如何把这个结论推广到曲面上,这是我们在这里所要解决的问题.

在曲面 S 上给出一个由 k 条光滑曲线段所围成的曲线多边形(如图 2-30),它围成了一个单连通曲面域 G. 多边形是 G 的边

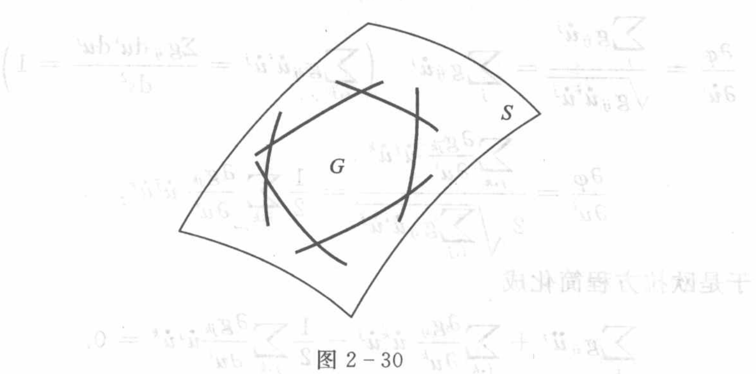


图 2-30

缘，记为∂G. 设曲面S的高斯曲率和测地曲率分别为K和k_g，曲面的面积元素和弧长元素分别为$d\sigma$和ds，则有以下公式成立.

高斯-波涅公式

$$\iint_G K\,d\sigma+\oint_{\partial G}k_g\,ds+\sum_{i=1}^{k}(\pi-\alpha_i)=2\pi,$$

其中α_i是∂G的第i个内角的角度，$\pi-\alpha_i$是外角的角度.

以下证明此公式成立.

在曲面S上引进半测地坐标网，有

$$ds^2=du^2+G dv^2,$$

且

$$\Gamma_{11}^1=0,\qquad \Gamma_{11}^2=0,\qquad \Gamma_{12}^1=0,$$

$$\Gamma_{12}^2=\frac{G_u}{2G},\qquad \Gamma_{22}^1=-\frac{1}{2}G_u,\qquad \Gamma_{22}^2=\frac{G_v}{2G}.$$

又由本节末的习题第13题知

$$k_g\,ds=d\left[\arctan\left(\sqrt{G}\frac{dv}{du}\right)\right]+(\sqrt{G})_u\,dv,$$

于是得

$$\oint_{\partial G}k_g\,ds+\oint_{\partial G}-(\sqrt{G})_u\,dv=\oint_{\partial G}d\left[\arctan\left(\sqrt{G}\frac{dv}{du}\right)\right].\tag{2.77}$$

根据格林公式

$$\oint_{\partial G}P(u,v)\,du+Q(u,v)\,dv=\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}\right)du\,dv,$$

命$P=0, Q=-(\sqrt{G})_u$，有

$$\oint_{\partial G}-(\sqrt{G})_u\,dv=\iint_G-(\sqrt{G})_{uu}\,du\,dv.$$

但是

$$d\sigma=\sqrt{G}\,du\,dv,$$

并且由§5的习题知，在半测地坐标网中高斯曲率K的公式是

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}},$$

所以(2.77)式的第二个积分是

$$\oint_{\partial G} -(\sqrt{G})_u \mathrm{d}v = \iint_G K\,\mathrm{d}\sigma.$$

现在我们讨论(2.77)中的第三个积分. 设∂G的切向量$\boldsymbol{\alpha}$和u—曲线的切向量$\boldsymbol{r}_u$的夹角为θ. 由于在半测地坐标网中$\boldsymbol{r}_u$是单位向量,所以有

$$\cos\theta = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r}_u = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{r}_u = \frac{\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{r}_u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s},$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2} = \pm\sqrt{G}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s},$$

那么

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\pm\sqrt{G}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}}{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}} = \pm\sqrt{G}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u},$$

其中所以产生正负号的原因是由于沿∂G积分时有两种不同的方向,不过如果我们采取逆时针方向时,可只取正号,即

$$\theta = \arctan\left(\sqrt{G}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right) \quad 或 \quad \tan\theta = \sqrt{G}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}.$$

这样,(2.77)可简化为

$$\oint_{\partial G} k_g\,\mathrm{d}s + \iint_G K\,\mathrm{d}\sigma = \oint_{\partial G}\mathrm{d}\theta.$$

易知绕∂G一周后,θ的增量是2π,但这个增量并不完全由上式中的第三个积分产生的,其中每一个外角$\pi-\alpha_i$是自然存在的增量,所以

$$\oint_{\partial G}\mathrm{d}\theta = 2\pi - (\pi-\alpha_1) - (\pi-\alpha_2) - \cdots - (\pi-\alpha_k),$$

于是(2.77)就变成所求的公式

$$\iint_G K\,\mathrm{d}\sigma + \oint_{\partial G} k_g\,\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{k}(\pi - \alpha_i) = 2\pi.$$

推论

1. 如果∂G是一条光滑曲线,则有

$$\iint_G K\,\mathrm{d}\sigma + \oint_{\partial G} k_g\,\mathrm{d}s = 2\pi.$$

2. 如果∂G是由测地线组成,则有

$$\iint_G K\,\mathrm{d}\sigma + \sum_{i=1}^{k}(\pi - \alpha_k) = 2\pi.$$

3. 如果∂G是一个测地三角形,即三条测地线所围成的三角形,则有

$$\iint_G K\,\mathrm{d}\sigma = 2\pi - (\pi - \alpha_1) - (\pi - \alpha_2) - (\pi - \alpha_3) = S(\Delta) - \pi,$$

其中 $S(\Delta)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 表示三内角之和.

6.6 曲面上向量的平行移动

一、曲面上的向量及其平行移动

曲面上的向量,指的是曲面上给定点处切于此曲面的向量. 如果从曲面的一点到另外一点平行移动一向量,那么,一般来说平行移动后的向量的方向与切平面成一角度,因而不能认为是曲面上的向量. 我们在这里建立曲面上向量的平行移动的概念.

设沿曲面 S 上一曲线(C)

$$u^i = u^i(t) \qquad (i=1,2)$$

的点 $M(t)$,给出一向量 $\boldsymbol{a}(t)$,它在点 $M(t)$处切于曲面,且沿此曲线给出一向量场. 当向量 $\boldsymbol{a}$ 从点 M 移动(按通常意义的移动)到邻近点 M' 时得到增量,其主要部分等于微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$. 从点 M 引 $\boldsymbol{a}+\mathrm{d}\boldsymbol{a}$,那么一般来说,这个向量不在点 M 的切平面上. 因此它不再是曲面在 M 的切向量,我们把它分解为在切平面上的和沿曲面法线 $\boldsymbol{n}$ 方向的两个支量(如图 2-31).

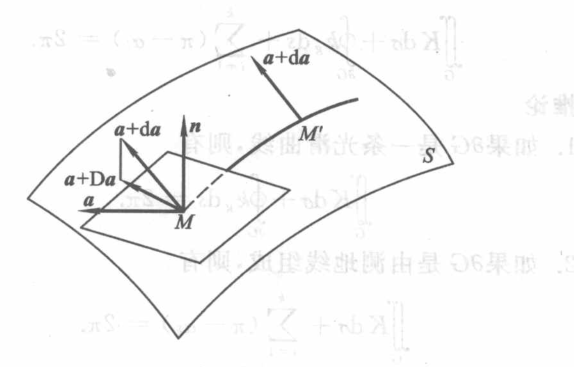


图 2-31

沿法线方向的支量为

$$[\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{a}+\mathrm{d}\boldsymbol{a})]\boldsymbol{n}.$$

因为 $\boldsymbol{a}$ 在点 M 处切于曲面，所以 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0$，因而向量 $\boldsymbol{a}+\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 沿法线方向的支量可由下式表示：

$$(\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a})\boldsymbol{n}.$$

从 $\boldsymbol{a}+\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 减去它在法线方向的支量，我们得到切线支量，记为 $(\boldsymbol{a}+\mathrm{d}\boldsymbol{a})_t$，则有

$$(\boldsymbol{a}+\mathrm{d}\boldsymbol{a})_t=\boldsymbol{a}+\mathrm{d}\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a})\boldsymbol{n},$$

这是从 $\boldsymbol{a}+\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 到点 M 处的切平面上的投影向量.

我们把点 M 处的向量 $(\boldsymbol{a}+\mathrm{d}\boldsymbol{a})_t$ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的差称为向量 $\boldsymbol{a}$ 从点 M 沿曲线 (C) 移动到点 M' 的**绝对微分**，用 $\mathrm{D}\boldsymbol{a}$ 来表示：

$$\mathrm{D}\boldsymbol{a}=\mathrm{d}\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a})\boldsymbol{n}. \tag{2.78}$$

由以上看出，当向量从点 M 沿曲线 (C) 移动到点 M' 时，向量 $\boldsymbol{a}$ 的绝对微分 $\mathrm{D}\boldsymbol{a}$ 等于把它的通常微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 投影到点 M 处的切平面上的部分，因此在点 M 处向量 $\boldsymbol{a}$ 的绝对微分 $\mathrm{D}\boldsymbol{a}$ 仍然是一个在点 M 处切于曲面的向量.

当 $\mathrm{D}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，表示向量 $\boldsymbol{a}$ 从点 M 沿 (C) 的方向移动到点 M' 时，微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 沿法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向，换句话说，把向量 $\boldsymbol{a}+\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 投影到点 M 的切平面上时，我们得到向量 $\boldsymbol{a}$. 这时，我们称向量 $\boldsymbol{a}+\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 是向

量 $\boldsymbol{a}$ 从点 M 沿(C)的方向到邻近点 M' 经过**平行移动**而得到的向量.

因为这样所定义的平行移动概念与所选取的曲线 $u^i=u^i(t)$ 有关,因此 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 称为沿曲线 $u^i=u^i(t)$ 在列维-奇维塔(Levi-Civita)意义下的平行向量,即称向量 $\boldsymbol{a}+\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 沿曲线 $u^i=u^i(t)$ 是列维-奇维塔平行移动.

特别地,在平面上向量的列维-奇维塔平行移动和通常意义下的平行移动一致,这是由于在平面上 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\mathrm{D}\boldsymbol{a}$.

现在我们导出绝对微分的分析表达式,从而可以得到平行移动的分析条件. 设沿所考虑的曲线(C),在曲线上每一个点,向量 $\boldsymbol{a}(t)$ 的坐标是 $a^1(t),a^2(t)$,即

$$\boldsymbol{a}=a^1\boldsymbol{r}_1+a^2\boldsymbol{r}_2,$$

其中 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$,取为曲面上在同一点 t 的切平面上的坐标向量.

先计算 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\mathrm{d}a^1\boldsymbol{r}_1+\mathrm{d}a^2\boldsymbol{r}_2+a^1(\boldsymbol{r}_{11}\mathrm{d}u^1+\boldsymbol{r}_{12}\mathrm{d}u^2)+a^2(\boldsymbol{r}_{21}\mathrm{d}u^1+\boldsymbol{r}_{22}\mathrm{d}u^2),$$

利用高斯方程,则有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{a}=&\mathrm{d}a^1\boldsymbol{r}_1+\mathrm{d}a^2\boldsymbol{r}_2+\\&a^1\{(\Gamma_{11}^1\boldsymbol{r}_1+\Gamma_{11}^2\boldsymbol{r}_2)\mathrm{d}u^1+(\Gamma_{12}^1\boldsymbol{r}_1+\Gamma_{12}^2\boldsymbol{r}_2)\mathrm{d}u^2\}+\\&a^2\{(\Gamma_{21}^1\boldsymbol{r}_1+\Gamma_{21}^2\boldsymbol{r}_2)\mathrm{d}u^1+(\Gamma_{22}^1\boldsymbol{r}_1+\Gamma_{22}^2\boldsymbol{r}_2)\mathrm{d}u^2\}+(*)\boldsymbol{n},\end{aligned}$$

这里没有写出的各项包含向量 $\boldsymbol{n}$ 且组成向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的法线支量. 去掉 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的法线支量后,所得到的就是 $\mathrm{D}\boldsymbol{a}$,把上式中的各项加以整理,即得

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\boldsymbol{a}=&\boldsymbol{r}_1(\mathrm{d}a^1+\Gamma_{11}^1a^1\mathrm{d}u^1+\Gamma_{12}^1a^1\mathrm{d}u^2+\Gamma_{21}^1a^2\mathrm{d}u^1+\\&\Gamma_{22}^1a^2\mathrm{d}u^2)+\boldsymbol{r}_2(\mathrm{d}a^2+\Gamma_{11}^2a^1\mathrm{d}u^1+\Gamma_{12}^2a^1\mathrm{d}u^2+\\&\Gamma_{21}^2a^2\mathrm{d}u^1+\Gamma_{22}^2a^2\mathrm{d}u^2).\end{aligned}$$

若 $\mathrm{D}\boldsymbol{a}$ 的坐标以 $\mathrm{D}a^1,\mathrm{D}a^2$ 来表示,即

$$\mathrm{D}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_1\mathrm{D}a^1+\boldsymbol{r}_2\mathrm{D}a^2,$$

则得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}a^1 &= \mathrm{d}a^1 + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \Gamma^1_{\alpha\beta} a^\alpha \mathrm{d}u^\beta, \\
\mathrm{D}a^2 &= \mathrm{d}a^2 + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \Gamma^2_{\alpha\beta} a^\alpha \mathrm{d}u^\beta,
\end{aligned}
\tag{2.79}
$$

这就是绝对微分的表达式.

特别地,若向量 $\boldsymbol{a}$ 作平行移动,则 $\mathrm{D}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,或即 $\mathrm{D}a^1=\mathrm{D}a^2=0$. 从而我们得到向量 $\boldsymbol{a}$ 由点 M 沿着方向($\mathrm{d}u^1$, $\mathrm{d}u^2$)平行移动到邻近点 M' 的分析表达式:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}a^1 &= -\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \Gamma^1_{\alpha\beta} a^\alpha \mathrm{d}u^\beta, \\
\mathrm{d}a^2 &= -\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \Gamma^2_{\alpha\beta} a^\alpha \mathrm{d}u^\beta.
\end{aligned}
\tag{2.80}
$$

这个条件表示,在平行移动下,向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标的微分可用它在点 M 处的坐标 a^1, a^2 和在点 M 的 Γ^k_{ij} 以及对应于从点 M 到点 M' 的微小位移的坐标微分 $\mathrm{d}u^1$, $\mathrm{d}u^2$ 来表达.

二、平行移动的性质

以上我们只在微小范围内考虑曲面上的平行移动. 现在把这个沿已知曲线作微小移动引用到有限部分的情形.

设在曲面上一条已知曲线(C):

$$u^i = u^i(t),$$

它的起点 $u^1(0)$, $u^2(0)$ 处作出曲面上的某一个向量 $\boldsymbol{a}_0$,如果在曲线(C)的某一点 t 处作出曲面上的向量 $\boldsymbol{a}(t)$(如图 2-32),使得当由点 t 移动到点 $t+\mathrm{d}t$ 时,向量 $\boldsymbol{a}+\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 由平行移动而得到的向量;且在起点 $t=0$ 的向量 $\boldsymbol{a}(t)$ 合于 $\boldsymbol{a}_0$. 我们说,向量 $\boldsymbol{a}_0$ 沿曲线(C)的平行移动是实现了. 换句话说,向量函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 的坐标 $a^1(t)$, $a^2(t)$ 在从点 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 的移动下,满足平行移动的条件(2.80);以 $\mathrm{d}t$ 除之,则函数 $a^1(t)$, $a^2(t)$ 必须满足下列微分方程:

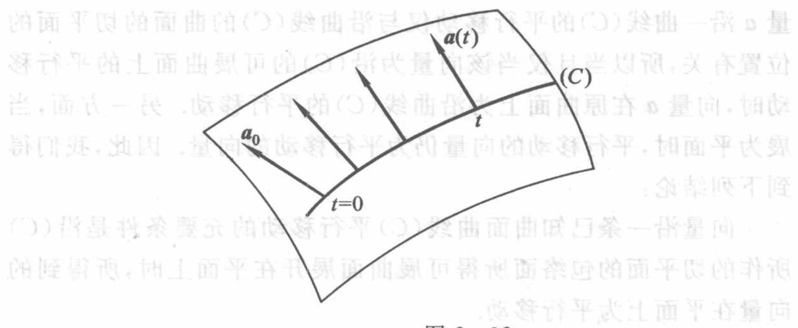


图 2-32

$$\frac{\mathrm{d}a^1}{\mathrm{d}t}=-\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{1}a^{\alpha}\frac{\mathrm{d}u^{\beta}}{\mathrm{d}t},$$
$$\frac{\mathrm{d}a^2}{\mathrm{d}t}=-\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{2}a^{\alpha}\frac{\mathrm{d}u^{\beta}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.81}$$

由此我们可以看到，a^1，a^2 关于 t 的导数是 a^1，a^2 本身的线性函数；这时，a^1，a^2 的系数是 t 的已知函数. 此外，当 $t=0$ 时，所求的函数 a^1，a^2 必取初始值 a_0^1，a_0^2，即向量 $\boldsymbol{a}_0$ 的坐标. 因此微分方程组(2.81)的解 $a^1(t)$，$a^2(t)$ 是惟一存在的. 总之，沿已知的曲面曲线(C)的平行移动总可以惟一地实现.

现在，导出在曲面上平行移动的一个很重要而且与普通意义下的平行移动相仿的性质.

若在起点 $M(t=0)$ 给定许多个切于曲面的向量，然后使这些向量沿一条曲面曲线平行移动，则这些向量的长度及它们之间的夹角都保持不变.

为了导出这个结论，我们先求出沿曲面平行移动的向量的作图法. 为此，沿某一曲面曲线(C)作出曲面的切平面，它们的包络是一可展曲面. 若在(C)上各个点作切于曲面的诸向量 $\boldsymbol{a}(t)$，则这些向量和曲线(C)也在可展曲面上. 把可展曲面展为平面，曲线(C)展为平面上的曲线(C_0)，而向量 $\boldsymbol{a}$ 变为平面上的向量 $\boldsymbol{a}_0$. 因可展曲面的切平面也是原曲面的切平面，由平行移动的定义知，向

量 $\boldsymbol{a}$ 沿一曲线(C)的平行移动仅与沿曲线(C)的曲面的切平面的位置有关，所以当且仅当该向量为沿(C)的可展曲面上的平行移动时，向量 $\boldsymbol{a}$ 在原曲面上为沿曲线(C)的平行移动. 另一方面，当展为平面时，平行移动的向量仍为平行移动的向量. 因此，我们得到下列结论：

向量沿一条已知曲面曲线(C)平行移动的充要条件是沿(C)所作的切平面的包络面所得可展曲面展开在平面上时，所得到的向量在平面上为平行移动.

由此，我们得出沿曲面曲线平行移动的向量的作图法：若在曲面曲线(C)上一点 M 给定一个向量 $\boldsymbol{a}$（如图 2 - 33），使其沿(C)平行移动到一点 M'，只要把(C)用以上方法展为平面曲线(C_0)，在点 M_0 取对应于 $\boldsymbol{a}$ 的向量 $\boldsymbol{a}_0$. 在点 M_0' 作按通常意义下的平行移动到 M_0' 的向量 $\boldsymbol{a}_0$，把这个平面图形施行扭曲变形使回到原曲面上来，则在 M' 点对应于 M_0' 处的 $\boldsymbol{a}_0$ 的向量就是所求的向量.

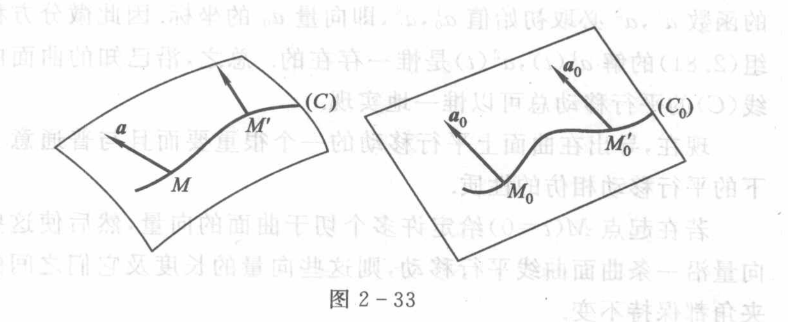


图 2 - 33

因为向量的长度与夹角对于展为平面的等距变换是不变的，所以由普通平行移动的性质推出：

在任一曲面曲线(C)上切于曲面的诸向量沿(C)平行移动时，这些向量的长度以及它们之间的夹角都保持不变.

现在我们从曲面上平行移动的观点来看测地线.

假定曲面曲线(C)的方程为 $u^i = u^i(s)$，其中 s 为(C)的弧长. 设

曲线(C)的切向量$\left(\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s}\right)$沿$(C)$平行移动，以$\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s}=a^1,\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s}=a^2$代入(2.81)(注意，这时(2.81)中的参数$t$换成$s$)，则变为方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u^k}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}=0,\quad i,j,k=1,2,$$

这是测地线的微分方程，反过来也成立. 总之，曲线(C)为测地线的充要条件是它的切向量在列维-奇维塔平行移动的意义下沿(C)是互相平行的.

测地线的这个性质跟普通空间中(或平面上)的直线的性质是相仿的. 因为直线有固定的方向，也就是在直线上任何一点沿直线的向量总跟这条直线是同方向的.

根据测地线的上述性质，如果要沿测地线平行移动一个长度一定的向量，只要把这个向量与已知测地线在移动过程中保持交于一个定角就可以得到. 显然，直线也有这个相仿的性质.

*6.7 极小曲面

现在我们讨论平均曲率$H\equiv0$的曲面. 先考虑以下极值问题：

设(C)是一空间光滑闭曲线，S是过(C)的一曲面，它的参数表示是

$$x^\alpha=x^\alpha(u^1,u^2),\ \alpha=1,2,3.$$

给定x^α和$\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}(\alpha=1,2,3,i=1,2)$的函数$L\left(x^\alpha,\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\right)$，考虑积分

$$\mathrm{I}=\iint_U L\left(x^\alpha,\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\right)\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2,$$

其中U是S中(C)所包围的曲面区域.

现在问：过曲线(C)的曲面S满足什么条件才使积分I取局部极小值？

考虑过曲线(C)的与S邻近的曲面

$$\overline{S}: \overline{x}^{\alpha} = x^{\alpha}(u^1, u^2) + \varepsilon w^{\alpha}(u^1, u^2),$$

其中 w^{α} 是沿曲线(C)为零的 C^{∞} 类函数.

设 $\overline{S}$ 上由曲线(C)所包围的曲面区域是 $\overline{U}$,则有积分

$$\overline{\mathrm{I}} = \iint_U L\left(x^{\alpha}, + \varepsilon w^{\alpha}, \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^i} + \varepsilon \frac{\partial w^{\alpha}}{\partial u^i}\right) \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2,$$

$$\alpha = 1, 2, 3; \ i = 1, 2.$$

由于 $\mathrm{I} = \min \overline{\mathrm{I}}$,所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overline{I}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0, \tag{2.82}$$

或

$$\iint_U \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}} w^{\alpha} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}_{,i}} \frac{\partial w^{\alpha}}{\partial u^i}\right) \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 = 0,$$

其中 $x^{\alpha}_{,i} = \dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^i}$.

上式又能改写成

$$\begin{aligned}&\iint_U \sum_{\alpha} w^{\alpha} \left[\frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}} - \sum_i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}_{,i}}\right)\right] \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 + \\ &\iint_U \sum_{\alpha} \sum_i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(w^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}_{,i}}\right) \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 = 0.\end{aligned} \tag{2.82$'$}$$

根据格林公式

$$\iint_U \left(\frac{\partial Q}{\partial u^1} - \frac{\partial P}{\partial u^2}\right) \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 = \int_C P(u^1, u^2) \mathrm{d}u^1 + Q(u^1, u^2) \mathrm{d}u^2,$$

所以有

$$\begin{aligned}&\iint_U \sum_{\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(w^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}_{,1}}\right) + \frac{\partial}{\partial u^2}\left(w^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}_{,2}}\right)\right] \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 \\ &= \sum_{\alpha} \int_C -\left(w^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}_{,2}}\right) \mathrm{d}u^1 + \left(w^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}_{,1}}\right) \mathrm{d}u^2.\end{aligned}$$

因为 w^{α} 沿曲线(C)为零,所以上述积分为零,又因为函数 w^{α} 是任意的,所以极值条件(2.82)或(2.82)$'$转化成

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial L}{\partial x^\alpha_{,i}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0,$$

这就是使积分 I 取局部极小值的条件，又称为欧拉方程.

现在我们希望寻找使(C)所包围的曲面区域 U 的面积为极小的曲面 S，这种曲面也称为**极小曲面**.

这时积分 I 就是曲面域 S 上曲线(C)所包围的区域 U 的面积

$$A = \iint_U \sqrt{g}\,\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2,$$

其中 $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$.

因为 $L = \sqrt{g}$，所以欧拉方程变成

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\alpha_{,i}}\right) - \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\alpha} = 0,\ \alpha = 1,2,3;\ i = 1,2.$$

根据定义

$$g_{ij} = \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j = \sum_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^j},\ \alpha = 1,2,3;i,j = 1,2,$$

所以有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\alpha_{,i}} &= \sum_{j,k}\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial g_{jk}}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha_{,i}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial g}{\partial g_{ii}}x^\alpha_{,i} + \sum_{j\neq i}\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}x^\alpha_{,j}\right) \\ &= \sqrt{g}\left(g^{ii}x^\alpha_{,i} + \sum_{j\neq i}g^{ij}x^\alpha_{,j}\right) = \sum_j \sqrt{g}\,g^{ij}x^\alpha_{,j},\end{aligned}$$

$$\alpha = 1,2,3;\ i,j,k = 1,2.$$

因而

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\alpha_{,i}}\right) &= \sum_{i,j,k}\sqrt{g}\Big[g^{ij}x^\alpha_{,j}\Gamma^k_{ki} + x^\alpha_{,j} \\ &\quad (-g^{kj}\Gamma^i_{ki} - g^{ik}\Gamma^j_{ki}) + g^{ij}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^i\partial u^j}\Big] \\ &= \sum_{i,j}\sqrt{g}\,g^{ij}\left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^i\partial u^j} - \sum_k \Gamma^k_{ji}x^\alpha_{,k}\right)\end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j} \sqrt{g} g^{ij} L_{ij} n^{\alpha},$$

$$\alpha = 1,2,3;\ i,j,k = 1,2,$$

其中 $\boldsymbol{n}=(n^1,n^2,n^3)$ 是曲面 S 的单位法向量，最后一等式得自曲面论的高斯方程 $\boldsymbol{r}_{ij} = \sum_k \Gamma_{ji}^k \boldsymbol{r}_k + L_{ij}\boldsymbol{n}$. 又因 $\sqrt{g} = \sqrt{\left|\sum_{\alpha} x^{\alpha}_{,i} x^{\alpha}_{,j}\right|}$ 不含 x^{α}，所以

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\alpha}} = 0,$$

而平均曲率 $H = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g^{ij} L_{ij}$，因此面积 A 为极小的欧拉方程简化成

$$H=0.$$

于是得到

定理 对于过空间光滑闭曲线(C)的曲面 S 来说，如果(C)所包围的曲面面积最小，则曲面 S 的平均曲率恒等于零. 换言之，极小曲面的平均曲率为零.

附记：定理中提出的极小曲面问题在 1866 年由 J. Plateau 提出，又称为 Plateau 问题. 1930 年 J. Douglas 和 T. Rado 分别独立地证明了解的存在性，不过他们的解中可能有孤立奇点，到了 1970 年，R. Osserman 证明了 Plateau 问题的解没有奇点.

习　题

1. 求正交网的坐标曲线的测地曲率.

2. 证明球面 $\boldsymbol{r}=\{a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u\}$ 上曲线的测地曲率 $k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{\sin u dv}{ds}$，其中 θ 表示曲线与经线的交角.

3. 求位于半径为 R 的球面上半径为 a 的圆的测地曲率.

4. 求位于正螺面 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=av$ 上的圆柱螺线 $x=u_0\cos v$, $y=u_0\sin v, z=av$（$u_0=$常数）的测地曲率.

5. 设曲面 S 上曲率线 (C)，(C) 上的点 P 不是 S 的抛物点. 证明 (C) 在点 P 的测地曲率的绝对值等于在 S 的球面映射下 (C) 的像在对应点的测地曲率与 (C) 在点 P 的法曲率之积的绝对值.

6. 若曲面 $S: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上曲线 $(C): u=u(t), v=v(t)$，t 为曲线 (C) 上任意参数，试导出测地曲率 k_g 的计算公式.

7. 求证旋转面的子午线是测地线，而平行圆仅当子午线的切线平行于旋转轴时才是测地线.

8. 求证：

(1) 如果测地线同时为渐近线，则它是一直线；

(2) 如果测地线同时为曲率线，则它是一平面曲线。

9. 已知曲面的第一基本形式 $\mathrm{I}=v(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$，证明它上面的测地线是 uv 平面上的抛物线.

10. 求正螺面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, av\}$ 上的测地线.

11. 利用刘维尔公式证明：(1) 平面上的测地线为直线；(2) 圆柱面上的测地线为圆柱螺线.

12. 证明：若曲面上非直线的所有测地线均为平面曲线，则它必为曲率线.

13. 如果在曲面上引进半测地坐标网：

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2.$$

求证：

$$k_g\,\mathrm{d}s=\mathrm{d}\left[\arctan\left(\sqrt{G}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)\right]+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\mathrm{d}v.$$

14. 给出曲面的第一基本形式是

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+G(u,v)\mathrm{d}v^2,$$

如果此曲面上的测地线与 u—曲线的夹角为 α 时，求证：

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}v}=-\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.$$

15. 证明：若曲面上有两族测地线的夹角为定角，则曲面是可展曲面.

16. 求半径为 R 的球面上测地三角形三内角之和.

17. 利用高斯-波涅公式证明：若曲面 S 上存在两族夹角为定角的测地线，则它的高斯曲率处处为零.

18. 若曲面 S 的高斯曲率处处小于零，则曲面 S 上不存在围成单连通区域的光滑的闭测地线.

19. 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是沿曲面上曲线(C)的向量场，f 是定义在(C)上的数量函数，证明下列绝对微分的运算性质：

(1) $\mathrm{D}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{D}\boldsymbol{a}+\mathrm{D}\boldsymbol{b}$；

(2) $\mathrm{D}(f\boldsymbol{a})=\mathrm{d}f\boldsymbol{a}+f\mathrm{D}\boldsymbol{a}$；

(3) $\mathrm{d}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\mathrm{D}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{D}\boldsymbol{b}$.

20. 设 $\boldsymbol{a}(s), \boldsymbol{b}(s)$ 是沿曲面上曲线(C)：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$的两个平行向量场，证明 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$常数. 并由此证明当曲面上一点处二向量沿曲面上曲线作列维-奇维塔平行移动时，它们的长度和夹角不变.

§7　常高斯曲率的曲面

7.1　常高斯曲率的曲面

在曲面 S

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$$

上选一条测地线作为 v—曲线：$u=0$；再取与它正交的测地线族作为 u—曲线，测地线族的正交轨线作为 v—曲线，对于这样的半测地坐标网，曲面的第一基本形式简化为

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+G(u,v)\mathrm{d}v^2,$$

其中 $G(0,v)=1, G_u(0,v)=0$.

根据§5的习题知，对于半测地坐标网来说，曲面的高斯曲率是

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

现在设曲面 S 的高斯曲率是常数，即 $K=$常数，则得微分方程

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}+K\sqrt{G}=0.$$

根据初始条件：$G(0,v)=1, G_u(0,v)=0$，我们可以按以下不同情形求出这个微分方程的解.

(1) 正常数高斯曲率的曲面($K>0$)，此时

$$\sqrt{G} = A(v)\cos\sqrt{K}u + B(v)\sin\sqrt{K}u.$$

根据初始条件 $A(v)=1, B(v)=0$，有

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + \cos^2\sqrt{K}u\mathrm{d}v^2.$$

实例：考虑球心在原点，半径为 R 的球面. 取赤道为最初给定的测地线，则所有经线是与赤道正交的测地线，所有纬线是这测地线族的正交轨线，因此球面上的经线和纬线构成半测地坐标网.

设球面上点的经度为 u，纬度为 v，则球面的参数表示是

$$\begin{cases} x = R\cos u\cos v, \\ y = R\cos u\sin v, \\ z = R\sin u, \end{cases}$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = R^2\mathrm{d}u^2 + R^2\cos^2 u\mathrm{d}v^2.$$

在球面上重新选择参数，命

$$\bar{u}=Ru, \bar{v}=Rv,$$

于是

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}\bar{u}^2 + \cos^2\frac{\bar{u}}{R}\mathrm{d}\bar{v}^2.$$

高斯曲率

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial\bar{u}^2} = -\frac{1}{\cos\frac{\bar{u}}{R}}\left[\cos\frac{\bar{u}}{R}\right]'' = \frac{1}{R^2}.$$

于是得到

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}\bar{u}^2 + \cos^2(\sqrt{K}\bar{u})\mathrm{d}\bar{v}^2,$$

因此正常数高斯曲率的曲面的第一基本形式与球面相同.

(2) $K=0$，从而有 $\sqrt{G}=1$，因此

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2,$$

所以零高斯曲率的曲面(可展曲面)的第一基本形式与平面相同.

(3) 负常数高斯曲率的曲面($K<0$)，此时

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + \cosh^2(\sqrt{-K}u)\mathrm{d}v^2,$$

这种情形我们在下一小节中再详细讨论.

7.2 伪球面

现在我们构造一种负常数高斯曲率的曲面.

我们首先定义 Oxz 平面上的曳物线(tractrix)如下:

定义 设曲线(C)上任意一点的切线上介于切点和 z 轴之间的线段始终保持定长 a,则此曲线称为曳物线. z 轴称为曳物线的渐近线.

下面我们来推导曳物线的方程,设它的参数表示为

$$x=x(t),z=z(t),$$

曲线上一点 $P(x,z)$的切线上点的坐标是$\left(x+\alpha\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},z+\alpha\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$,其中 α 是参数. 如果这点在 z 轴上,则

$$x+\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0,\text{即 }\alpha=-x\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

所以曲线在 $P(x,z)$点的切线与 z 轴的交点 Q 的坐标是

$$\left(0,z-\frac{x\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right).$$

因为$|PQ|=a$,所以

$$x^2+x^2\left(\frac{\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right)^2=a^2,$$

由此得出

$$\mathrm{d}z=\pm\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\mathrm{d}x.$$

如果令 $x=a\sin t$,则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\pm\frac{a\cos t}{a\sin t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t=\pm a\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t\\&=\pm a\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

所以

$$z=\pm a\left(\ln\tan\frac{t}{2}+\cos t\right).$$

因此，Oxz 平面上以 z 轴为渐近线的曳物线方程是

$$\begin{cases}x=a\sin t,\\ z=\pm a\left(\ln\tan\frac{t}{2}+\cos t\right).\end{cases}$$

如果把上述曳物线绕 z 轴旋转，所得的旋转面称为伪球面（如图 2－34），它的参数表示是

$$\begin{cases}x=a\sin t\cos\theta,\\ y=a\sin t\sin\theta,\\ z=\pm a\left(\ln\tan\frac{t}{2}+\cos t\right).\end{cases}$$

图 2－34

下面我们来计算伪球面的第一基本形式，并证明它的高斯曲率是负常数.

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\\&=(a\cos t\cos\theta\mathrm{d}t-a\sin t\sin\theta\mathrm{d}\theta)^2+\\&\quad(a\cos t\sin\theta\mathrm{d}t+a\sin t\cos\theta\mathrm{d}\theta)^2+a^2\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right)^2\mathrm{d}t^2\end{aligned}$$

$$= a^2\cos^2 t\,dt^2 + a^2\sin^2 t d\theta^2 + \left(\frac{a^2}{\sin^2 t} - 2a^2 + a^2\sin^2 t\right)dt^2,$$

由此得到

$$\mathrm{I} = a^2\cot^2 t dt^2 + a^2\sin^2 t d\theta^2.$$

改变曲面的参数,命

$$u = a\ln\sin t, v = \theta,$$

于是,有

$$du = a\cot t dt, \sin t = e^{\frac{u}{a}},$$

所以伪球面的第一基本形式是

$$\mathrm{I} = du^2 + a^2 e^{\frac{2u}{a}} dv^2,$$

因此对于参数(u,v)的坐标网是半测地坐标网,u-曲线($v=$常数)是测地线族.

伪球面的高斯曲率是

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2} = -\frac{1}{e^{u/a}}\cdot(e^{u/a})'' = -\frac{1}{a^2}.$$

下面我们要把伪球面经过保角变换映到平面上,并讨论经过保角变换后,伪球面上的测地线对应平面上的什么曲线?为此,我们再改变伪球面的参数.

命

$$x = v, y = e^{-u/a},$$

于是

$$dv = dx, du = -\frac{a dy}{y}.$$

伪球面的第一基本形式又可改写成

$$ds^2 = \frac{a^2}{y^2}(dx^2 + dy^2),$$

因此从曲面上的点(u,v)到平面上的点(x,y)的映射是一保角变换.

对于伪球面上的新参数(x,y)和上述第一基本形式,我们来

计算一下测地线的公式

$$\ddot{u}^i + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k = 0,$$

其中

$$u^1 = x, u^2 = y.$$

$$\Gamma^1_{11} = 0, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -1/y, \quad \Gamma^1_{22} = 0,$$

$$\Gamma^2_{11} = 1/y, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0, \quad \Gamma^2_{22} = -1/y,$$

所以测地线的方程是

$$\begin{cases} \ddot{x} - \dfrac{2\dot{x}\dot{y}}{y} = 0, \\ \ddot{y} + \dfrac{\dot{x}^2 - \dot{y}^2}{y} = 0. \end{cases}$$

从第一式得到

$$\frac{\ddot{x}}{y^2} - \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y^3} = 0,$$

即

$$\left(\frac{\dot{x}}{y^2}\right)^{\cdot} = 0.$$

所以

$$\dot{x} = \alpha y^2 \quad (\alpha \text{ 为常数}).$$

从第二式得到

$$\frac{\ddot{y}}{y} - \frac{\dot{y}^2}{y^2} + \frac{\dot{x}^2}{y^2} = 0,$$

即

$$\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^{\cdot} + \frac{\dot{x}^2}{y^2} = 0.$$

把 $\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{a}{\dot{x}}$ 代入上式，得到

$$\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^{\cdot} + \alpha\dot{x} = 0,$$

于是有

$$\frac{\dot{y}}{y}+\alpha x=\beta \quad (\beta \text{为常数}).$$

因为

$$\begin{cases}\dot{x}=\alpha y^2,\\ \dot{y}=(-\alpha x+\beta)y,\end{cases}$$

所以有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dot{y}/\dot{x}=\frac{-\alpha x+\beta}{\alpha y},$$

或

$$(\alpha x-\beta)\mathrm{d}x+\alpha y\mathrm{d}y=0,$$

积分后得到

$$\frac{1}{2}\alpha x^2-\beta x+\frac{1}{2}\alpha y^2=\gamma \quad (\gamma=\text{常数}),$$

把上式整理后，最后得到形如

$$(x-c)^2+y^2=r^2$$

的方程. 这是 Oxy 平面上圆心在 x 轴上的圆的方程. 于是得到

命题 若通过伪球面的第一基本形式

$$\mathrm{I}=\frac{a^2}{y^2}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2),$$

把它经过保角变换映到平面上，则伪球面上的测地线对应于圆心在 x 轴上的圆.

下面我们仅考虑 Oxy 平面上在 x 轴上方的半平面($y\geqslant 0$)，我们称它为罗氏平面. 伪球面上的测地线经过保角变换映成罗氏平面上圆心在 x 轴上的半圆，我们把这半圆称为**罗氏直线**. 注意，过罗氏平面上任两点 P_1 和 P_2，正好有一条罗氏直线联结它们，通过保角变换，过伪球面上任两点，也就有惟一一条测地线联结它们.

7.3 罗氏几何

(1) 罗氏平面上的长度

设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 是罗氏平面上的两点，通过保角变换，它们对应伪球面上两点，联结这两点有惟一一条测地线，我们把这两对应点之间的测地线的弧长定义为 P_1 到 P_2 的罗氏距离. 所以，

$$s(P_1,P_2)=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}\mathrm{d}s=a\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}\frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{y},$$

积分沿着 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 对应的伪球面上的两点之间的惟一的测地线进行. 注意测地线的方程是

$$(x-c)^2+y^2=r^2,$$

作参数变换

$$x=c+r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

若命

$$x_1=c+r\cos\theta_1,\quad y_1=r\sin\theta_1,$$
$$x_2=c+r\cos\theta_2,\quad y_2=r\sin\theta_2,$$

则

$$s(P_1,P_2)=a\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}\frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{y}=a\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$$

$$=a\ln\tan\frac{\theta}{2}\bigg|_{\theta_1}^{\theta_2}=a\ln\frac{\tan\frac{\theta_2}{2}}{\tan\frac{\theta_1}{2}}.$$

设罗氏直线 P_1P_2 与 x 轴的交点为 P_0 和 P_∞，由于这四点在一圆上，我们可以定义它们的非调和比 $(P_1,P_2;P_0,P_\infty)$.

如图 2－35 所示，任取圆上一点 S，定义

$$(P_1,P_2;P_0,P_\infty)=\frac{\sin\angle P_1SP_0}{\sin\angle P_2SP_0}:\frac{\sin\angle P_1SP_\infty}{\sin\angle P_2SP_\infty},$$

所以

$$(P_1,P_2;P_0,P_\infty)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_2}{2}\right)}:\frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\sin\frac{\theta_2}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta_1}{2}}{\cos\frac{\theta_2}{2}} : \frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\sin\frac{\theta_2}{2}} = \frac{\tan\frac{\theta_2}{2}}{\tan\frac{\theta_1}{2}}.$$

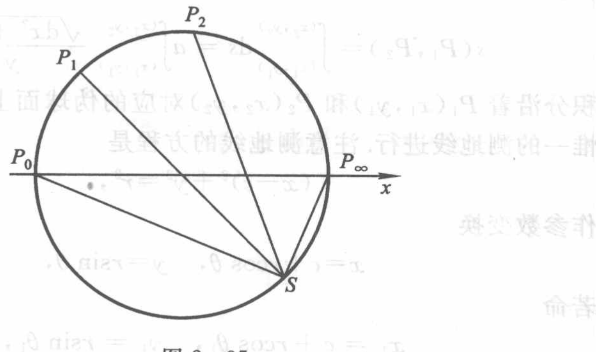


图 2－35

因此罗氏距离公式是

$$s(P_1,P_2) = a\ln(P_1,P_2;P_0,P_\infty).$$

小结 设 P_1 和 P_2 是罗氏平面上两点，过这两点作圆交 x 轴于 P_0,P_∞，则定义 P_1 和 P_2 之间的罗氏距离为

$$s(P_1,P_2) = a\ln(P_1,P_2;P_0,P_\infty),$$

其中非调和比$(P_1,P_2;P_0,P_\infty)$定义为

$$(P_1,P_2;P_0,P_\infty) = \frac{\sin\angle P_1SP_0}{\sin\angle P_2SP_0} : \frac{\sin\angle P_1SP_\infty}{\sin\angle P_2SP_\infty},$$

这里 S 为过 P_1 和 P_2，圆心在 x 轴上的圆上的任一点.

注意，当 $P_1\to P_\infty$ 或 $P_2\to P_0$ 时，$(P_1,P_2;P_0,P_\infty)\to\infty$，所以可以认为 x 轴上的点 P_0 或 P_∞ 是罗氏平面上的“无穷远点”，也就是说，x 轴是罗氏平面的“无穷远线”.

(2) 罗氏平面上的平行线

罗氏平面上的直线 l 就是圆心在 x 轴上的 x 轴上方的半圆，它交 x 轴于 P_0 和 P_∞ 两点.

设 P 是罗氏平面上在直线 l 外的任一点，则过 P 和 P_0 有一

条罗氏直线 l_0，过 P 和 P_∞ 有一条罗氏直线 l_∞，直线 l 与直线 l_0 交于“无穷远点”P_0，因此可以认为直线 l 和 l_0 是平行的；同理，直线 l 和 l_∞ 是平行的（如图 2-36）.

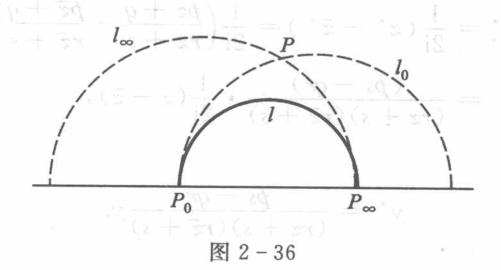


图 2-36

因此在罗氏平面上，过直线 l 外一点 P 可以作两条直线 l_0 和 l_∞ 平行于直线 l，因而在罗氏平面上欧几里得几何的平行公理不成立.

(3) 罗氏平面上的运动

把定义了笛卡儿直角坐标 (x,y) 的平面看成复平面，平面上的点 (x,y) 对应一个复数

$$z=x+\mathrm{i}y.$$

罗氏平面对应于 $y\geqslant 0$ 的上半复平面，在复平面上作线性变换

$$z^*=\frac{pz+q}{rz+s},$$

其中 p,q,r,s 是实数，且 $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}>0$，这是复平面上的保角变换，它使上半复平面变成上半复平面.

现在我们来讨论：$\mathrm{d}s^2=\frac{a^2}{y^2}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)$ 在上述线性变换下变成什么.

$$\mathrm{d}z^*=\frac{(ps-qr)\mathrm{d}z}{(rz+s)^2},\mathrm{d}\bar{z}^*=\frac{(ps-qr)\mathrm{d}\bar{z}}{(r\bar{z}+s)^2},$$

其中 $\bar{z}$ 和 $\bar{z}^*$ 分别表示 z 和 z^* 的共轭复数.

$$\mathrm{d}z^* \mathrm{d}\bar{z}^* = \frac{(ps-qr)^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}}{(rz+s)^2(r\bar{z}+s)^2},$$

但是

$$y^* = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z^* - \bar{z}^*) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{pz+q}{rz+s} - \frac{p\bar{z}+q}{r\bar{z}+s}\right)$$

$$= \frac{(ps-qr)}{(rz+s)(r\bar{z}+s)} \cdot \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z}),$$

即

$$y^* = \frac{ps-qr}{(rz+s)(r\bar{z}+s)}y.$$

所以

$$a^2 \frac{\mathrm{d}z^* \mathrm{d}\bar{z}^*}{y^{*2}} = a^2 \frac{\mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}\bar{z}}{y^2},$$

即

$$\frac{a^2}{y^{*2}}(\mathrm{d}x^{*2} + \mathrm{d}y^{*2}) = \frac{a^2}{y^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2),$$

或

$$\mathrm{d}s^{*2} = \mathrm{d}s^2.$$

因此线性变换

$$z^* = \frac{pz+q}{rz+s}, \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} > 0$$

保持罗氏距离不变，它就是罗氏平面上的等距变换公式.

在19世纪初，罗巴契夫斯基（Лобачевский Н. И），波利埃（J. Bolyai），高斯大胆地否定了欧氏几何中的平行公理，另外设立一条替代它的公理. 他们分别独立地建立了一种新的几何学，称为双曲几何学. 由于最先公开发表的是罗巴契夫斯基，所以也称此几何学为罗巴契夫斯基的非欧几何学，简称罗氏几何.

后来（1868）贝尔特拉米（E. Beltrami）用微分几何的理论建立了罗氏几何的模型，那就是上述的“在一伪球面上，即高斯曲率等于$-\frac{1}{a^2}$的一个曲面上，把测地线看作直线而构成的几何”. 另一

方面，黎曼发展了罗巴契夫斯基的思想(1854)，建立了与欧氏几何学和双曲几何学都不同的椭圆几何学. 双曲几何学与椭圆几何学总称为非欧几何学.

(4) 罗氏几何的模型

上面介绍的是罗氏几何的 **Poincaré 模型**. 现在我们将介绍罗氏几何的另一种模型，称为 **Klein 模型**.

设 D 是欧氏平面(x,y)上半径等于 a 的圆的内部(即圆盘)：

$$D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2<a^2\},$$

在 D 中定义一种微分几何，它的度量(即第一基本形式)是

$$\mathrm{d}s^2=\frac{4a^4}{(a^2-(x^2+y^2))^2}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2),$$

命 $z=x+\sqrt{-1}y$，则

$$\mathrm{d}s^2=\frac{4a^4}{(a^2-|z|^2)^2}\mathrm{d}z\cdot\mathrm{d}\bar{z}.$$

下面我们将指出：D 中定义了以上度量的微分几何是罗氏几何. 为此，我们要把这种微分几何与罗氏几何的 Poincaré 模型相比较. 设 D' 是欧氏平面(u,v)的上半部

$$D'=\{(u,v)\in\mathbf{R}^2 : u>0\}$$

在 D' 中定义度量

$$\mathrm{d}\bar{s}^2=\frac{a^2}{v^2}(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2),$$

于是 D' 中定义的微分几何是罗氏几何，因为它的高斯曲率 $K=-\dfrac{1}{a^2}$，这就是罗氏几何的 Poincaré 模型.

命 $w=u+\sqrt{-1}v$，则

$$\mathrm{d}\bar{s}^2=\frac{a^2}{(\mathrm{Im}w)^2}\mathrm{d}w\cdot\mathrm{d}\bar{w},$$

考虑欧氏平面中，把区域 D 映到区域 D' 上的保角映射

$$w=\sqrt{-1}\,\frac{a-z}{a+z}\quad 或\quad z=a\,\frac{\sqrt{-1}-w}{\sqrt{-1}+w},$$

则有

$$\frac{4a^4}{(a^2-|z|^2)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}=\frac{a^2}{(\mathrm{Im}w)^2}\mathrm{d}w\mathrm{d}\bar{w}. \qquad (*)$$

所以，$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\bar{s}^2$. 这说明上述保角映射是等距变换. 由于区域 D 和区域 D' 上的第一基本形式相同，它们的高斯曲率也相同，所以区域 D 上所定义的微分几何的高斯曲率 $K=-\frac{1}{a^2}$，因此，也是罗氏几何. 区域 D 上所定义的微分几何是罗氏几何的另一种模型，即为 Klein 模型.

（$*$）式的证明：

$$\mathrm{d}w=\frac{-\sqrt{-1}2a\mathrm{d}z}{(a+z)^2},\mathrm{d}\bar{w}=\frac{\sqrt{-1}2a\mathrm{d}\bar{z}}{(a+\bar{z})^2}$$

设 $w=u+\sqrt{-1}v$，则

$$v=\frac{a^2-x^2-y^2}{(a+x)^2+y^2}$$

$$\mathrm{d}w\cdot\mathrm{d}\bar{w}=\frac{4a^2\mathrm{d}z\cdot\mathrm{d}\bar{z}}{[(a+z)(a+\bar{z})]^2}=\frac{4a^2\mathrm{d}z\cdot\mathrm{d}\bar{z}}{[(a+x)^2+y^2]^2}$$

$$=v^2\frac{4a^2\mathrm{d}z\cdot\mathrm{d}\bar{z}}{(a^2-(x^2+y^2))^2}=v^2\frac{4a\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}}{(a^2-|z|^2)^2}.$$

附记：半径为 a 的球面的高斯曲率为$\frac{1}{a^2}$，所以半径为 $\sqrt{-1}a$ 的虚球面的高斯曲率为$-\frac{1}{a^2}$. 因此，罗氏几何可以看成是虚球面上的几何. 不过，它有实的模型（例如，Klein 模型）. 下面，提到虚球面的时候，就把它理解成**负常高斯曲率的曲面**.

第三章

外微分形式和活动标架

§1　外微分形式

1.1　格拉斯曼(Grassmann)代数

设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 n 维向量空间，它的一组基底是 $e_1,\cdots,e_n$，用这组基底形式地作下列元素

$$
\begin{array}{ll}
e_i, & i=1,2,\cdots,n, \\
e_i\wedge e_j, & 1\leqslant i<j\leqslant n, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}, & 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n, &
\end{array}
$$

连同 $\mathbf{R}$ 中的单位元素 1，一共有

$$1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$$

个元素. 用这 2^n 个元素作基底，再作一实数域 $\mathbf{R}$ 上的 2^n 维向量空间 $G(V)$. 其中以 C_n^p 个元素

$$e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_p},\ 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n$$

为基底的实向量空间记成 V^p，它是 $G(V)$ 的子空间，它的元素称为 $G(V)$ 的 p 次齐次元素，它们可以具体表示成

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} a_{i_1 i_2\cdots i_p} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_p},$$

其中系数 $a_{i_1 i_2\cdots i_p}\in\mathbf{R}$. 以后为了方便起见,我们把 $\mathbf{R}$ 写成 V^0,把 V 写成 V^1,于是 $G(V)$ 中任何一个元素 w 可以惟一地表示成

$$w=w_0+w_1+\cdots+w_n,$$

其中 $w_p\in V^p(p=0,1,\cdots,n)$. 这说明 2^n 维向量空间 $G(V)$ 是 C_n^p 维向量空间 $V^p(p=0,1,\cdots,n)$ 的直和,记成

$$G(V)=V^0\oplus V^1\oplus\cdots\oplus V^n.$$

注意

$$V^n\cong\mathbf{R},$$

因为 V^n 的任何一个元素可以表示成

$$ae_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n,\ a\in\mathbf{R}.$$

这个元素一一对应于实数 a,这个对应关系建立了 1 维向量空间 V^n 与 $\mathbf{R}$ 之间的同构.

实例:设 V 是 $\mathbf{R}$ 上的 3 维向量空间,$\{e_1,e_2,e_3\}$ 是它的一组基底,则

$$G(V)=V^0\oplus V^1\oplus V^2\oplus V^3,$$

其中

$$V^0=\mathbf{R},\ V^1=V,$$

V^2 是 $e_1\wedge e_2, e_2\wedge e_3, e_3\wedge e_1$ 为基底的 3 维实向量空间. V^3 是以 $e_1\wedge e_2\wedge e_3$ 为基底的 1 维实向量空间,它同构于 $\mathbf{R}$,所以 $G(V)$ 是 8 维实向量空间.

下面我们在向量空间 $G(V)$ 中引进一种乘法,使它成为一个代数,这种乘法只需在基底上定义,然后再线性地扩充到整个 $G(V)$ 上去.

定义 在 $G(V)$ 中引进乘法"$\wedge$",规定它满足以下规律:

$$e_i\wedge e_j=-e_j\wedge e_i,$$

$$(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})\wedge(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_q})=e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}\wedge e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_q},$$

同时又满足结合律和分配律

$$(x\wedge y)\wedge z=x\wedge(y\wedge z)=x\wedge y\wedge z,$$
$$x\wedge(ay+bz)=ax\wedge y+bx\wedge z,$$
$$(ax+by)\wedge z=ax\wedge z+by\wedge z,$$

这种乘法称为**外乘**. 定义了外乘以后的 $G(V)$ 称为实向量空间 V 上的格拉斯曼代数.

附记:

(1) 对于每一个 $x\in V^1(=V)$,我们有

$$x\wedge x=0.$$

设 $x=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$, 因为 $e_i\wedge e_i=0$,所以

$$\begin{aligned}x\wedge x&=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\right)\wedge\left(\sum_{j=1}^{n}a_je_j\right)\\&=\sum_{i,j=1}^{n}a_ia_je_i\wedge e_j\\&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_je_i\wedge e_j+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}a_ia_je_i\wedge e_j\\&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j(e_i\wedge e_j+e_j\wedge e_i)=0\end{aligned}$$

(2) 外乘的定义要求 $G(V)$ 的基底是线性无关的. 我们举例说明这一点,设

$$ae_1\wedge e_3+be_2\wedge e_4\wedge e_5+ce_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4=0,$$

把上式乘以 $e_2\wedge e_4\wedge e_5\wedge\cdots\wedge e_n$,则易知 $a=0$. 同理可证 $b=0$ 和 $c=0$,因此 $e_1\wedge e_3$,$e_2\wedge e_4\wedge e_5$ 和 $e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4$ 是线性无关的.

格拉斯曼代数满足以下反交换律:

命题 1 设 $x\in V^p$, $y\in V^q$, 则

$$x\wedge y=(-1)^{pq}y\wedge x.$$

证明 因为外乘是满足分配律的,所以只需考虑

$$x=e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p},\quad y=e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_q}$$

的情形. 这时

$$(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})\wedge(e_{j_1}\wedge e_{j_2}\wedge\cdots\wedge e_{j_q})$$

$$=(-1)^p e_{j_1}\wedge(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})\wedge(e_{j_2}\wedge\cdots\wedge e_{j_q})$$
$$=(-1)^{pq}(e_{j_1}\wedge e_{j_2}\wedge\cdots\wedge e_{j_q})\wedge(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}).$$

设 $y_1,\cdots,y_p$ 是 V 中一组向量,则它们可以表示成

$$y_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j,\ i=1,\cdots,p.$$

命题 2

$$y_1\wedge\cdots\wedge y_p=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\begin{vmatrix}a_{1i_1}&\cdots&a_{1i_p}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{pi_1}&\cdots&a_{pi_p}\end{vmatrix}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}.$$

证明

$$y_1\wedge\cdots\wedge y_p=\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^n a_{1i_1}\cdots a_{pi_p}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p},$$

这说明 $y_1\wedge\cdots\wedge y_p\in V^p$,但是 V^p 中的基底是

$$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p},\ 1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n,$$

因此,我们必须把任意次序的外积 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$ 变成标准次序的外积 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}(i_1<\cdots<i_p)$. 因而我们在计算和式 $\sum\limits_{i_1,\cdots,i_p=1}^n$ 时应分两步走:先从$(1,\cdots,n)$中任选 p 个数 $i_1<\cdots<i_p$,然后再把这 p 个数任意排列,因此

$$y_1\wedge\cdots\wedge y_p$$
$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\Big(\sum_{(i_1,\cdots,i_p)}(-1)^{[i_1,\cdots,i_p]}a_{1i_1}\cdots a_{pi_p}\Big)e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p},$$

其中 $\sum\limits_{(i_1,\cdots,i_p)}$ 表示对$(i_1,\cdots,i_p)$的任意排列求和,$[i_1,\cdots,i_p]$表示某排列对于顺序 $i_1<\cdots<i_p$ 的反序数. 于是得到

$$y_1\wedge\cdots\wedge y_p=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\begin{vmatrix}a_{1i_1}&\cdots&a_{1i_p}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{pi_1}&\cdots&a_{pi_p}\end{vmatrix}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}.$$

推论 1 V 中的向量 $y_1,\cdots,y_p$ 是线性无关的必要和充分条件是

$$y_1 \wedge \cdots \wedge y_p \neq 0.$$

证明 如果 $y_1 \wedge \cdots \wedge y_p \neq 0$，则矩阵 (a_{ij}) $(i=1,\cdots,p;\ j=1,\cdots,n)$ 中总有一个 p 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{pi_1} & \cdots & a_{pi_p} \end{vmatrix} \neq 0,$$

即矩阵 (a_{ij}) 的秩为 p. 这说明向量组 $y_1,\cdots,y_p$ 是线性无关的. 反之，如果向量组 $y_1,\cdots,y_p$ 线性无关，则矩阵 (a_{ij}) 的秩为 p. 这说明总有一个上述 p 阶行列式不为零，所以 $y_1 \wedge \cdots \wedge y_p \neq 0$.

推论 2 设 $y_1,\cdots,y_n$ 是 V 的另一组基底，并且

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j,\ i = 1,\cdots,n,$$

则有

$$y_1 \wedge \cdots \wedge y_n = \det(a_{ij}) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n,$$

其中 $\det(a_{ij}) \neq 0$ 表示矩阵 (a_{ij}) 的行列式.

附记：如果 $\det(a_{ij}) > 0$，则我们说 V 的两组基底 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 和 $\{y_1,\cdots,y_n\}$ 的定向是相同的.

实例：仍设 V 是 3 维实向量空间，y_1, y_2, y_3 是 V 的另一组基，并且

$$y_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} e_j,\ i = 1,2,3,$$

于是有

$$\begin{aligned} y_1 \wedge y_2 &= (a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3) \wedge (a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2 + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} e_2 \wedge e_3 + \\ &\quad \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} e_3 \wedge e_1, \end{aligned}$$

$$y_1 \wedge y_2 \wedge y_3 = (a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3) \wedge (a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3) \wedge (a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3.$$

如果 $\det(a_{ij}) > 0$，则线性变换 $y_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}e_j (i = 1,2,3)$ 保持基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 和 $\{y_1, y_2, y_3\}$ 的定向.

1.2 外微分形式

在上一小节中，如果把向量空间 V 的系数域 $\mathbf{R}$ 换成带单位元素的交换环 K，则 V 称为环 K 上的**模**(module). 类似于上一小节，从环 K 上的模 V 我们可以作出另外一个模 $G(V)$，并且可以类似地在这个模中引进外乘.

设 K 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 的某开集 U 上的全体 C^∞-函数①所构成的环. 再设 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标是 $(x^1, \cdots, x^n)$，系数属于 U 上的 C^∞-函数环 K，以 $(\mathrm{d}x^1, \cdots, \mathrm{d}x^n)$ 为基底的模为 V，然后作 K 上的模

$$G(V) = V^0 \oplus V^1 \oplus \cdots \oplus V^n,$$

其中

$$V^0 = K, V^1 = V, V^n \cong K.$$

$V^p(p=1, \cdots, n)$ 中的元素可以表示成

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} a_{i_1 \cdots i_p}(x^1, \cdots, x^n) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p},$$

它们称为 U 上的 ***p* 次外形式**. 特别地，$V^1 = V$ 中的元素的具体表达式是

① C^∞-函数是在 U 上存在任何阶的连续偏导数的函数.

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x^1,\cdots,x^n)\mathrm{d}x^i = a_1(x^1,\cdots,x^n)\mathrm{d}x^1 + \cdots + a_n(x^1,\cdots,x^n)\mathrm{d}x^n,$$

它们称为 U 上的 **1 次形式**,又称为 U 上的**普法夫(Pfaff)形式**.

例 (1) $n=1$ 的情形. 设 $\mathbf{R}$ 中的坐标为 x,则

$$0 \text{ 次形式是} \quad \omega_0 = f(x),$$

$$1 \text{ 次形式是} \quad \omega_1 = \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

(2) $n=2$ 的情形. 设 $\mathbf{R}^2$ 中的坐标是(x,y), 则

$$0 \text{ 次形式是} \quad \omega_0 = f(x,y),$$

$$1 \text{ 次形式是} \quad \omega_1 = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

$$2 \text{ 次形式是} \quad \omega_2 = \varphi(x,y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

(3) $n=3$ 的情形. 设 $\mathbf{R}^3$ 中的坐标是(x,y,z), 则

$$0 \text{ 次形式是} \quad \omega_0 = f(x,y,z),$$

$$1 \text{ 次形式是} \quad \omega_1 = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

$$2 \text{ 次形式是} \quad \omega_2 = P(x,y,z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

$$3 \text{ 次形式是} \quad \omega_3 = \varphi(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

设 U 是 $\mathbf{R}^n$ 中一开集,每一个 U 上的普法夫形式

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{d}x^i = a_1 \mathrm{d}x^1 + a_2 \mathrm{d}x^2 + \cdots + a_n \mathrm{d}x^n$$

对应于 U 上一向量场 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 给出一组普法夫形式,如果它所对应的向量场在 U 的每一点处是线性无关的,则称这组普法夫形式是**线性无关的**.

命题 3(嘉当(Cartan)引理) 给出 U 上 p 个线性无关的普法夫形式 $f_1,f_2,\cdots,f_p(1\leqslant p\leqslant n)$. 如果另有 U 上 p 个普法夫形式 $g_1,g_2,\cdots,g_p$,使得

$$f_1 \wedge g_1 + f_2 \wedge g_2 + \cdots + f_p \wedge g_p = 0,$$

则存在 U 上的 C^∞-函数组 $a_{ij}(i,j=1,\cdots,p)$ 使得下列关系式成立

$$g_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} f_j,\ i = 1,\cdots,p,$$

并且

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

证明 我们可以在 U 上逐点证明此命题. 对于 U 上一固定点来说,当 $p=n$ 时,由于 $f_1,\cdots,f_n$ 线性无关,因此可以选作 V 的基底,这时有

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j,\ i = 1,\cdots,n.$$

但是因为

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \wedge g_i = 0,$$

所以

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_i \wedge f_j = 0,$$

由于 $f_i \wedge f_i = 0$, $f_i \wedge f_j = -f_j \wedge f_i$, 所以

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_{ij} - a_{ji}) f_i \wedge f_j = 0.$$

但是 $f_i \wedge f_j (1\leqslant i<j\leqslant n)$ 是 V^2 的基底,因此线性无关,所以

$$a_{ij} - a_{ji} = 0, i,j = 1,\cdots,n,$$

即

$$a_{ij} = a_{ji},\ i,j = 1,\cdots,n.$$

当 $p<n$ 时,由于 $f_1,\cdots,f_p$ 线性无关,我们可以补充 $n-p$ 个普法夫形式 $f_{p+1},\cdots,f_n$,使得 $f_1,\cdots,f_n$ 构成 V 的一组基底. 于是有

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j,\ i = 1,\cdots,p.$$

再设

$$g_{p+1} = \cdots = g_n = 0,\ a_{ij} = 0,\ i = p+1,\cdots,n;\ j = 1,\cdots,n,$$

于是有

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j,\ i = 1,\cdots,n,$$

并且

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \wedge g_i = \sum_{i=1}^{p} f_i \wedge g_i = 0.$$

根据 $p=n$ 时的讨论

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j,\ i = 1,\cdots,p,$$

并且

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

但是

$$a_{p+1,j} = \cdots = a_{n,j} = 0,\ j = 1,\cdots,n,$$

所以

$$a_{j,p+1} = \cdots = a_{j,n} = 0,\ j = 1,\cdots,n.$$

因此

$$g_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} f_j,\ i = 1,\cdots,p,$$

其中

$$a_{ij} = a_{ji},\ i,j = 1,\cdots,p.$$

推论 给出两个 U 上的普法夫形式 f 和 g，如果 $f \wedge g = 0$，则存在 U 上的 C^{∞}-函数 a 使得 $g = af$.

现在我们在外形式模 $G(V)$ 中引进一种微分运算，称为**外微分**. 引进了外微分以后，模 $G(V)$ 的元素称为 U 上的**外微分形式**，V^p 中的元素称为 **p 次外微分形式**，以后简称为 p-形式.

定义 外微分是一映射

$$\mathrm{d}: V^p \to V^{p+1},$$

它的定义如下：设 $\omega_p \in V^p$，

$$\omega_p = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} a_{i_1 \cdots i_p}(x^1,\cdots,x^n)\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p},$$

我们规定

$$d\omega_p = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n} da_{i_1\cdots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

$$= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p},$$

显然 $d\omega_p \in V^{p+1}$. 从此定义可以直接看出：如果 $\omega\in V^0$，则外微分就是普通微分；如果 $\omega\in V^n$，则 $d\omega=0$，因为 $dx^i\wedge dx^i=0$.

我们再把以上外微分运算的定义扩充到整个 $G(V)$ 上.

定义 设 $\omega\in G(V)$，并且

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n, \omega_p \in V^p,$$

规定

$$d\omega = d\omega_0 + d\omega_1 + \cdots + d\omega_n.$$

例

(1) 考虑 $n=1$ 的情形.

$$\omega_0 = f(x), \ d\omega_0 = f'(x)dx.$$

$$\omega_1 = \varphi(x)dx, \ d\omega_1 = \varphi'(x)dx \wedge dx = 0.$$

(2) 考虑 $n=2$ 的情形.

$$\omega_0 = f(x,y), \ d\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

$$\omega_1 = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

$$d\omega_1 = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy.$$

$$\omega_2 = \varphi(x,y)dx \wedge dy, \ d\omega_2 = 0.$$

(3) 考虑 $n=3$ 的情形.

$$\omega_0 = f(x,y,z),$$

$$d\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

$$\omega_1 = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,$$

$$\mathrm{d}\omega_1 = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x +$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y +$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x +$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

$$\omega_2 = P(x,y,z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x +$$

$$R(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}\omega_2 = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z +$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x +$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

$$\omega_3 = \varphi(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,\ \mathrm{d}\omega_3 = 0.$$

定理 设 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中一 p 维区域（$1 \leqslant p \leqslant n$），$\partial G$ 是 G 的边缘，具有 G 诱导的定向，ω 是 G 上的 $(p-1)$-形式，则下列公式成立

$$\int_{\partial G} \omega = \int_G \mathrm{d}\omega,$$

这个公式通常称为**斯托克斯（Stokes）公式**.

我们不打算在这里证明此定理，因为它已超出了微分几何这门课程的范围，有兴趣的读者可以查阅多元微积分的书（例如，C. Goffman著，史济怀等译《多元微积分》，人民教育出版社，1978年出版）. 不过我们要指出，当 $n=2$ 或 3 时，普通微积分教程中已经证明斯托克斯公式是成立的.

$n=2$ 时,设 $p=2$,G 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上一区域,∂G 是它的边缘闭曲线,再设 ω 是 1-形式

$$\omega = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y,$$
$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

这时斯托克斯公式为

$$\int_{\partial G} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

这就是我们所熟悉的平面上的格林(Green)公式.

$n=3$ 时,设 $p=2$,则 G 是空间 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面域,∂G 是它的边缘(空间)闭曲线. 再设 ω 是 1-形式

$$\omega = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z,$$
$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x +$$
$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

这时,斯托克斯公式为

$$\int_{\partial G} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_G \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z +$$
$$\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

这就是我们在微积分教程中所见到的斯托克斯公式.

如果 $p=3$,则 G 是空间 $\mathbf{R}^3$ 中一区域,∂G 是它的边缘闭曲面. ω 是 2-形式

$$\omega = P(x,y,z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x +$$
$$R(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$
$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

这时,斯托克斯公式为

$$\int_{\partial G} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$=\int_G\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,$$

这就是微积分教程中的高斯公式.

附记：再考虑一下 $n=1$ 的情形(如图 3-1)，这时 $p=1$，G 是实数轴 $\mathbf{R}$ 上一区间$[a,b]$，∂G 是它的端点 a 和 b，不过要加上定向，b 端的外法向是正的，a 端的外法向是负的. ω 是 0-形式，即函数 $f(x)$，这时斯托克斯公式为

$$\int_a^b \mathrm{d}f(x)=f(b)-f(a),$$

这就是微积分基本定理. 因此斯托克斯公式可以看成是一维的微积分基本定理在高维空间中的推广.

图 3-1

最后我们再证明两个外微分公式.

命题 4(Poincaré 引理) 设 $\omega\in G(V)$，则

$$\mathrm{dd}\omega=0.$$

证明 根据外微分的定义，只须考虑 ω 是 V^p 的单项式的情形. 设

$$\omega=a_{i_1\cdots i_p}(x^1,\cdots,x^n)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p},$$

$$\mathrm{d}\omega=\sum_{i=1}^n\frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)&=\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^j\partial x^i}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\\&=\sum_{j<i}\left(\frac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^j\partial x^i}-\frac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i\partial x^j}\right)\cdot\\&\qquad\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p},\end{aligned}$$

因为

$$\frac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^j\partial x^i}=\frac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i\partial x^j},$$

所以

$$\mathrm{dd}\omega = 0.$$

命题 5 设 $\omega \in V^p$，$\theta \in V^q$，则

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \theta) = \mathrm{d}\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}\theta.$$

证明 根据外微分的定义，只须考虑 ω 和 θ 是单项式的情形，设

$$\omega = a(x^1, \cdots, x^n)\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p},$$

$$\theta = b(x^1, \cdots, x^n)\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_q},$$

则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega \wedge \theta) &= \mathrm{d}(ab\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_q}) \\
&= \mathrm{d}(ab) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_q} \\
&= (\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}) \wedge (b\,\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_q}) + \\
&\quad a\,\mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_q} \\
&= (\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}) \wedge (b\,\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_q}) + \\
&\quad (-1)^p (a\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}) \wedge \\
&\quad (\mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_q}) \\
&= \mathrm{d}\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

实例：设 $n=3$，$\mathbf{R}^3$ 的坐标是 (x, y, z)，ω 和 θ 是 $\mathbf{R}^3$ 中某开集 U 上的普法夫形式

$$\omega = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

$$\theta = a(x,y,z)\mathrm{d}x + b(x,y,z)\mathrm{d}y + c(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = 0.$$

$$d\theta=\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}\right)dz\wedge dx+\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)dx\wedge dy,$$

$$\omega\wedge\theta=(Qc-Rb)dy\wedge dz+(Ra-Pc)dz\wedge dx+(Pb-Qa)dx\wedge dy,$$

$$\begin{aligned}d(\omega\wedge\theta)=&\left\{\frac{\partial}{\partial x}(Qc-Rb)+\frac{\partial}{\partial y}(Ra-Pc)+\frac{\partial}{\partial z}(Pb-Qa)\right\}dx\wedge dy\wedge dz\\=&\left\{a\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+b\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+c\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}dx\wedge dy\wedge dz-\\&\left\{P\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)\right\}dx\wedge dy\wedge dz\\=&\,d\omega\wedge\theta-\omega\wedge d\theta.\end{aligned}$$

1.3 弗罗贝尼乌斯(Frobenius)定理

考虑 $\mathbf{R}^3$ 中的一个普法夫(Pfaff)方程

$$\omega=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0,$$

根据一阶偏微分方程理论(可参阅微分方程教程,例如,艾利斯哥尔兹著,南开大学数学系译,崔士英校《微分方程》(人民教育出版社)第六章§3),如果它满足下列完全可积条件

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0,\qquad (*)$$

则存在 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面

$$f(x,y,z)=\text{常数},$$

使得 $df=0$ 与普法夫方程 $\omega=0$ 是等价的,即

$$\mathrm{d}f = \lambda(x,y,z)\omega,$$

这曲面称为普法夫方程 $\omega=0$ 的积分曲面. 显然,过空间 $\mathbf{R}^3$ 中一点 (x_0,y_0,z_0),只存在惟一积分曲面

$$f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0).$$

现在我们要把普法夫方程 $\omega=0$ 的完全可积条件改换一个形式.

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

设 $R\neq 0$,则

$$\mathrm{d}z = \frac{\omega - P\mathrm{d}x - Q\mathrm{d}y}{R},$$

所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega = {} & \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \left(\frac{\omega - P\mathrm{d}x - Q\mathrm{d}y}{R}\right) + \\
& \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\left(\frac{\omega - P\mathrm{d}x - Q\mathrm{d}y}{R}\right) \wedge \mathrm{d}x + \\
& \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
= {} & \left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\right] \wedge \omega + \\
& \frac{1}{R}\left\{P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \right. \\
& \left. R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

因此条件(*)等价于存在一个普法夫形式 θ 使得

$$\mathrm{d}\omega = \theta \wedge \omega,$$

这个等价条件就叫做普法夫形式 ω 的弗罗贝尼乌斯条件.

反之,如果普法夫形式

$$\omega = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

满足弗罗贝尼乌斯条件

$$\mathrm{d}\omega = \theta \wedge \omega,$$

其中 θ 是另外一个普法夫形式

$$\theta = a(x,y,z)\mathrm{d}x + b(x,y,z)\mathrm{d}y + c(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

则有

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

$$\theta \wedge \omega = (bR - cQ)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (cP - aR)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (aQ - bP)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

根据弗罗贝尼乌斯条件,我们有

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = bR - cQ,\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = cP - aR,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = aQ - bP,$$

所以

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0.$$

因此,普法夫方程 $\omega=0$ 完全可积.

根据以上分析,我们可以得出以下结论:如果普法夫形式 ω 满足弗罗贝尼乌斯条件,则普法夫方程 $\omega=0$ 是完全可积的.

附记:设 $R(x,y,z)\neq 0$,把普法夫方程 $\omega=0$ 改写成它的等价形式

$$\mathrm{d}z = -\frac{P}{R}\mathrm{d}x - \frac{Q}{R}\mathrm{d}y,$$

它等价于一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{P}{R},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Q}{R}.$$

如果此方程组有解,设它的解是

$$z = z(x,y,C).$$

因为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{Q}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{P}{R}\right),$$

因而

$$\frac{-R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{R^2}$$

$$= \frac{-R\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + P\left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{R^2}.$$

再把$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{P}{R}$和$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Q}{R}$代入上式,化简后立即得到普法夫方程$\omega=0$的完全可积条件(*). 因此,普法夫方程$\omega=0$的完全可积条件(*)就等价于一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{P}{R},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Q}{R}$$

的完全可积条件

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{Q}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{P}{R}\right).$$

现在我们把上述例子推广到高维空间,以下我们假定

$$i,j = 1,\cdots,n; \quad k,l,m,q = 1,\cdots,p \quad (p < n).$$

设$\mathbf{R}^{n+p}$中的坐标是$(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^p)$,考虑定义在$\mathbf{R}^{n+p}$中某开集$U$上的$p$个线性无关的普法夫形式

$$\omega^l(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^p)$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n}\psi_i^l(x,y)\mathrm{d}x^i + \sum_{k=1}^{p}\psi_{n+k}^l(x,y)\mathrm{d}y^k,\ l = 1,\cdots,p,$$

它们确定了 U 上的普法夫方程组

$$\omega^l = 0, \quad l = 1, \cdots, p.$$

实例：当 $n=2$，$p=1$，则我们得到上面例子中的普法夫方程 $\omega=0$.

如果存在 U 中某 n 维曲面 S

$$y^k = y^k(x^1, \cdots, x^n), \ k = 1, \cdots, p$$

使得我们把上述方程中的函数 $y^k(x^1, \cdots, x^n)$ 代入普法夫形式 ω^l $(l=1,\cdots,p)$ 以后，$\omega^l \equiv 0$，即

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i^l(x, y(x)) \mathrm{d}x^i + \sum_{k=1}^{p} \psi_{n+k}^l(x, y(x)) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \right) \equiv 0,$$

则曲面 S 就称为普法夫方程组 $\omega^l=0(l=1,\cdots,p)$ 的**积分曲面**，S 的方程称为普法夫方程组的解. 如果过 U 中任一点只存在惟一的积分曲面，则称普法夫方程组是**完全可积的**. 下面我们将要给出普法夫方程组 $\omega^l=0(l=1,\cdots,p)$ 是完全可积的必要和充分条件.

设另有一组 U 上的普法夫形式

$$\pi^l = \sum_{k=1}^{p} a_k^l(x, y) \omega^k, \ l = 1, \cdots, p,$$

其中 $\det(a_k^l) \neq 0$，则我们说普法夫方程组

$$\pi^l = 0, \ l = 1, \cdots, p$$

与给定的普法夫方程组 $\omega^l=0(l=1,\cdots,p)$ 是**等价**的.

定义 U 上的普法夫形式 $\omega^l(l=1,\cdots,p)$，如果存在 U 上的普法夫形式 $f_k^l(k,l=1,\cdots,p)$ 使得

$$\mathrm{d}\omega^l = \sum_{k=1}^{p} f_k^l \wedge \omega^k, \ l = 1, \cdots, p,$$

则称 $\omega^l(l=1,\cdots,p)$ 是满足弗罗贝尼乌斯条件的.

命题 6 如果普法夫方程组 $\omega^l=0(l=1,\cdots,p)$ 和普法夫方程组 $\pi^l=0(l=1,\cdots,p)$ 是等价的，则其中一组普法夫形式满足弗罗贝尼乌斯条件时另一组也满足此条件.

证明 设普法夫形式 $\omega^l(l=1,\cdots,p)$ 满足弗罗贝尼乌斯条

件，则存在普法夫形式 $f^l_k(k,l=1,\cdots,p)$使得

$$\mathrm{d}\omega^l=\sum_{k=1}^{p}f^l_k\wedge\omega^k,\ l=1,\cdots,\ p.$$

现在普法夫方程组 $\pi^l=0(l=1,\cdots,p)$与普法夫方程组 $\omega^l=0(l=1,\cdots,p)$等价，即存在函数 a^l_k 使得

$$\pi^l=\sum_{k=1}^{p}a^l_k\omega^k,\ l=1,\cdots,\ p,$$

其中 $\det(a^l_k)\neq 0$，

$$\mathrm{d}\pi^l=\sum_{k=1}^{p}\mathrm{d}a^l_k\wedge\omega^k+\sum_{k=1}^{p}a^l_k\mathrm{d}\omega^k$$

$$=\sum_{q=1}^{p}\Big(\mathrm{d}a^l_q+\sum_{k=1}^{p}a^l_kf^k_q\Big)\wedge\omega^q.$$

从等式 $\pi^l=\sum_{k=1}^{p}a^l_k\omega^k$ 反解出

$$\omega^l=\sum_{k=1}^{p}b^l_k\pi^k,\ l=1,\cdots,\ p,$$

其中$(b^l_k)=(a^l_k)^{-1}$. 于是有

$$\mathrm{d}\pi^l=\sum_{q,m=1}^{p}b^q_m\Big(\mathrm{d}a^l_q+\sum_{k=1}^{p}a^l_kf^k_q\Big)\wedge\pi^m,$$

因此存在普法夫形式

$$\tilde{f}^l_m=\sum_{q=1}^{p}b^q_m\Big(\mathrm{d}a^l_q+\sum_{k=1}^{p}a^l_kf^k_q\Big)$$

使得普法夫形式 $\pi^l(l=1,\cdots,p)$也满足弗罗贝尼乌斯条件

$$\mathrm{d}\pi^l=\sum_{m=1}^{p}\tilde{f}^l_m\wedge\pi^m,\ l=1,\cdots,p.$$

根据这个命题，当我们想解一个普法夫方程组

$$\omega^l\equiv\sum_{i=1}^{n}\psi^l_i(x,y)\mathrm{d}x^i+\sum_{k=1}^{p}\psi^l_{n+k}(x,y)\mathrm{d}y^k=0,\ l=1,\cdots,p$$

的时候，可以先找出一个与它等价的而且形式上简单一些的普法夫方程组 $\pi^l=0$，然后去解后者. 由于普法夫形式$\omega^l(l=1,\cdots,p)$

是线性无关的，所以矩阵$(\psi_j^l)(l=1,\cdots,p;\ j=1,\cdots,n+p)$的秩为$p$，因此不妨假定$\det(\psi_{n+k}^l)\neq 0(k,l=1,\cdots,p)$. 这时，我们可以从普法夫方程组$\omega^l=0(l=1,\cdots,p)$解出

$$\mathrm{d}y^l=\sum_{i=1}^n \varphi_i^l(x,y)\mathrm{d}x^i,\ l=1,\cdots,p.$$

因此普法夫方程组$\omega^l=0(l=1,\cdots,p)$等价于

$$\pi^l\equiv \mathrm{d}y^l-\sum_{i=1}^n \varphi_i^l(x,y)\mathrm{d}x^i=0,\ l=1,\cdots,p.$$

现在，我们来计算普法夫形式$\pi^l(l=1,\cdots,p)$的弗罗贝尼乌斯条件，

$$\mathrm{d}\pi^l=\mathrm{d}\mathrm{d}y^l-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial\varphi_i^l}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i-\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^p \frac{\partial\varphi_i^l}{\partial y^k}\mathrm{d}y^k\wedge\mathrm{d}x^i,$$

因为

$$\mathrm{d}y^l=\pi^l+\sum_{i=1}^n\varphi_i^l\mathrm{d}x^i,\ l=1,\cdots,p,$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\pi^l=&-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial\varphi_i^l}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i-\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^p \frac{\partial\varphi_i^l}{\partial y^k}\pi^k\wedge\mathrm{d}x^i-\\&\sum_{i,j=1}^n\sum_{k=1}^p \frac{\partial\varphi_i^l}{\partial y^k}\varphi_j^k\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i\\=&\sum_{k=1}^p\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi_i^l}{\partial y^k}\mathrm{d}x^i\right)\wedge\pi^k+\\&\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\left(-\frac{\partial\varphi_i^l}{\partial x^j}+\frac{\partial\varphi_j^l}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i+\\&\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\left[\sum_{k=1}^p\left(-\frac{\partial\varphi_i^l}{\partial y^k}\varphi_j^k+\frac{\partial\varphi_j^l}{\partial y^k}\varphi_i^k\right)\right]\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i.\end{aligned}$$

这说明，要使普法夫形式π^l满足弗罗贝尼乌斯条件，即存在普法夫形式$\widetilde{f}_k^l$使得

$$\mathrm{d}\pi^l=\sum_{k=1}^p\widetilde{f}_k^l\wedge\pi^k,\ l=1,\cdots,p,$$

必要和充分的条件是

$$\frac{\partial \varphi_i^l}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \varphi_i^l}{\partial y^k} \varphi_j^k = \frac{\partial \varphi_j^l}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \varphi_j^l}{\partial y^k} \varphi_i^k,\ i,j = 1,\cdots,n.$$

这是普法夫形式 π^l 的弗罗贝尼乌斯条件的另外一种表示形式.

现在我们来证明普法夫方程组或一阶偏微分方程组的基本定理.

定理(Frobenius) 设 $\mathbf{R}^{n+p}$ 的坐标是 $x^1,\cdots,x^n,y^l,\cdots,y^p$, U 是 $\mathbf{R}^{n+p}$ 中一开集,$\omega^l(l=1,\cdots,p)$是 U 上 p 个普法夫形式,则普法夫方程组

$$\omega^l \equiv \sum_{i=1}^{n} \psi_i^l(x,y)\mathrm{d}x^i + \sum_{k=1}^{p} \psi_{n+k}^l(x,y)\mathrm{d}y^k = 0,\ l = 1,\cdots,p,$$

其中 $\det(\psi_{n+k}^l) \neq 0$,完全可积的必要和充分条件是普法夫形式 ω^l $(l=1,\cdots,p)$满足弗罗贝尼乌斯条件.

证明 必要性:根据命题 6 后面的分析,我们知道可以不直接去解普法夫方程组 $\omega^l=0(l=1,\cdots,p)$,而是解与它等价的普法夫方程组

$$\pi^l \equiv \mathrm{d}y^l - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^l(x,y)\mathrm{d}x^i = 0,\ l = 1,\cdots,p,$$

后者又等价于一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial y^l}{\partial x^i} = \varphi_i^l(x,y),\ i = 1,\cdots,n;\ l = 1,\cdots,p.$$

如果普法夫方程组 $\omega^l=0(l=1,\cdots,p)$完全可积,则上述一阶偏微分方程组也完全可积. 设积分曲面的方程是

$$y^l = y^l(x^1,\cdots,x^n),\ l = 1,\cdots,\ p,$$

因此

$$\frac{\partial^2 y^l}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 y^l}{\partial x^j \partial x^i},\ i,\ j = 1,\cdots,n;\ l = 1,\cdots,p.$$

因为

$$\frac{\partial y^l}{\partial x^i} = \varphi_i^l(x,y),\ i = 1,\cdots,n;\ l = 1,\cdots,p,$$

所以

$$\frac{\partial \varphi_j^l}{\partial x^i}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial \varphi_j^l}{\partial y^k}\varphi_i^k=\frac{\partial \varphi_i^l}{\partial x^j}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial \varphi_i^l}{\partial y^k}\varphi_j^k,$$

$$i,\ j=1,\cdots,n;\ l=1,\cdots,p,$$

这就是普法夫形式 $\pi^l(l=1,\cdots,p)$ 的弗罗贝尼乌斯条件. 根据命题 6,普法夫形式 $\omega^l(l=1,\cdots,p)$ 也满足弗罗贝尼乌斯条件.

充分性：用归纳法证明.

先设 $n=1$. 普法夫方程组 $\omega^l=0(l=1,\cdots,p)$ 等价于

$$\pi^l\equiv \mathrm{d}y^l-\varphi^l(x,y^1,\cdots,y^p)\mathrm{d}x=0,\ l=1,\cdots,p.$$

对于这种情形,弗罗贝尼乌斯条件不起作用. 因为

$$\mathrm{d}\pi^l=\mathrm{d}\mathrm{d}y^l-\frac{\partial \varphi^l}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial \varphi^l}{\partial y^k}\mathrm{d}y^k\wedge \mathrm{d}x$$

$$=-\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial \varphi^l}{\partial y^k}(\pi^k+\varphi^k\mathrm{d}x)\wedge \mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial \varphi^l}{\partial y^k}\mathrm{d}x\wedge \pi^k,$$

所以普法夫形式 π^l 一定满足弗罗贝尼乌斯条件.

普法夫方程组 $\pi^l=0(l=1,\cdots,p)$ 等价于常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y^l}{\mathrm{d}x}=\varphi^l(x,y^1,\cdots,y^p),\ l=1,\cdots,p.$$

根据常微分方程组解的存在惟一定理,给出初始条件:

$$x=x_0\ \text{时},y^l=y_0^l,\ l=1,\cdots,p,$$

上述常微分方程组存在惟一解

$$y^l=y^l(x),\ l=1,\cdots,p.$$

设定理在 $n=r$ 时成立,下面要证明:当 $n=r+1$ 时定理也成立.

给出普法夫方程组

$$\omega^l\equiv\sum_{i=1}^{r+1}\psi_i^l(x^1,\cdots,x^r,x^{r+1},y^1,\cdots,y^p)\mathrm{d}x^i+$$

$$\sum_{k=1}^{p}\psi_{n+k}^{l}(x^1,\cdots,x^r,x^{r+1},y^1,\cdots,y^p)\mathrm{d}y^k = 0,\ l = 1,\cdots,p.$$

假定普法夫形式 $\omega^l(l=1,\cdots,p)$满足弗罗贝尼乌斯条件：

$$\mathrm{d}\omega^l = \sum_{k=1}^{p} f_k^l \wedge \omega^k,\ l = 1,\cdots,p.$$

令 $\tilde{\omega}^l=\omega^l\big|_{x^{r+1}=x_0^{r+1}}(l=1,\cdots,p)$，于是得普法夫方程组

$$\tilde{\omega}^l \equiv \sum_{i=1}^{r}\psi_i^l(x^1,\cdots,x^r,x_0^{r+1},y^1,\cdots,y^p)\mathrm{d}x^i +$$

$$\sum_{k=1}^{p}\psi_{n+k}^{l}(x^1,\cdots,x^r,x_0^{r+1},y^1,\cdots,y^p)\mathrm{d}y^k = 0,\ l = 1,\cdots,p.$$

从普法夫形式 $\omega^l(l=1,\cdots,p)$的弗罗贝尼乌斯条件，我们可以得到普法夫形式 $\tilde{\omega}^l(l=1,\cdots,p)$的弗罗贝尼乌斯条件

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}^l = \sum_{k=1}^{p}\tilde{f}_k^l \wedge \tilde{\omega}^k,\ l = 1,\cdots,p,$$

其中 $\tilde{f}_k^l=f_k^l\big|_{x^{r+1}=x_0^{r+1}}$. 根据归纳假设，普法夫方程组 $\tilde{\omega}^l=0(l=1,\cdots,p)$完全可积，即给出初始条件

$$x^i = x_0^i(i = 1,\cdots,r)\text{ 时}, y^k = y_0^k(k = 1,\cdots,p)$$

存在惟一积分曲面

$$\tilde{f}^l(x^1,\cdots,x^r,x_0^{r+1},y^1,\cdots,y^p) = \tilde{f}^l(x_0^1,\cdots,x_0^r,x_0^{r+1},y_0^1,\cdots,y_0^p),$$
$$l = 1,\cdots,p,$$

即存在函数 $\tilde{\lambda}_k^l(x^1,\cdots,x^r,x_0^{r+1},y^1,\cdots,y^p)(l=1,\cdots,p)$使得

$$\mathrm{d}\tilde{f}^l(x^1,\cdots,x^r,x_0^{r+1},y^1,\cdots,y^p)$$
$$= \sum_{k=1}^{p}\tilde{\lambda}_k^l(x^1,\cdots,x^r,x_0^{r+1},y^1,\cdots,y^p)\tilde{\omega}^k,\ l = 1,\cdots,p.$$

把上式中的 x_0^{r+1} 改回成 x^{r+1}，命

$$\tilde{f}^l(x^1,\cdots,x^r,x^{r+1},y^1,\cdots,y^p)$$
$$= \tilde{f}^l(x^1,\cdots,x^r,x_0^{r+1},y^1,\cdots,y^p)\big|_{x_0^{r+1}\to x^{r+1}},$$
$$\lambda_k^l(x^1,\cdots,x^r,x^{r+1},y^1,\cdots,y^p)$$

$$= \widetilde{\lambda}^l_k(x^1, \cdots, x^r, x_0^{r+1}, y^1, \cdots, y^p)\,|_{x_0^{r+1} \to x^{r+1}},$$

$$\omega^l = \widetilde{\omega}^l\,|_{x_0^{r+1} \to x^{r+1}} + \psi^l_{r+1}(x, y)\mathrm{d}x^{r+1},$$

所以

$$\mathrm{d}f^l(x^1, \cdots, x^r, x^{r+1}, y^1, \cdots, y^p)$$

$$= \mathrm{d}\widetilde{f}^l(x^1, \cdots, x^r, x_0^{r+1}, y^1, \cdots, y^p)\,|_{x_0^{r+1} \to x^{r+1}} + \frac{\partial f^l}{\partial x^{r+1}}\mathrm{d}x^{r+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \widetilde{\lambda}^l_k(x^1, \cdots, x^r, x_0^{r+1}, y^1, \cdots, y^p)\,|_{x_0^{r+1} \to x^{r+1}} \cdot \widetilde{\omega}^k\,|_{x_0^{r+1} \to x^{r+1}} +$$

$$\frac{\partial f^l}{\partial x^{r+1}}\mathrm{d}x^{r+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \lambda^l_k(x^1, \cdots, x^{r+1}, y^1, \cdots, y^p)[\omega^k - \psi^k_{r+1}(x, y)\mathrm{d}x^{r+1}] +$$

$$\frac{\partial f^l}{\partial x^{r+1}}\mathrm{d}x^{r+1}.$$

因此普法夫方程组 $\omega^l = 0(l = 1, \cdots, p)$ 等价于普法夫方程组

$$\pi^l \equiv \mathrm{d}f^l(x^1, \cdots, x^{r+1}, y^1, \cdots, y^p) - \frac{\partial f^l}{\partial x^{r+1}}\mathrm{d}x^{r+1} +$$

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda^l_k(x^1, \cdots, x^{r+1}, y^1, \cdots, y^p)\psi^k_{r+1}(x, y)\mathrm{d}x^{r+1} = 0.$$

现在我们作 $\mathbf{R}^{n+p}$ 中的坐标变换，令

$\widetilde{x}^i = x^i$,

$\widetilde{y}^k = f^k(x^1, \cdots, x^{r+1}, y^1, \cdots, y^p), k = 1, \cdots, p.$

注意，

$$\mathrm{d}\widetilde{f}^l = \sum_{m=1}^{p} \widetilde{\lambda}^l_m \widetilde{\omega}^m,$$

$$\frac{\partial \widetilde{f}^l}{\partial y^k} = \sum_{m=1}^{p} \widetilde{\lambda}^l_m \widetilde{\psi}^m_{n+k}, k, l = 1, \cdots, p,$$

所以

$$\frac{\partial \widetilde{y}^l}{\partial y^k} = \frac{\partial f^l}{\partial y^k} = \sum_{m=1}^{p} \lambda^l_m \psi^m_{n+k},\ k,\ l = 1 \cdots, p.$$

因为 $\det(\psi^m_{n+k})\neq 0$，所以

$$\det\left(\frac{\partial \tilde{y}^l}{\partial y^k}\right)\neq 0.$$

因此根据隐函数定理，总可以解出

$$y^k=\varphi^k(x^1,\cdots,x^{r+1},\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^p),k=1,\cdots,p.$$

这时普法夫方程组 $\pi^l=0\ (l=1,\cdots,p)$ 变成

$$\tilde{\pi}^l\equiv d\tilde{y}^l-\tilde{\lambda}^l(x^1,\cdots,x^{r+1},\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^p)dx^{r+1}=0,l=1,\cdots,p,$$

其中

$$\tilde{\lambda}^l(x^1,\cdots,x^{r+1},\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^p)=\frac{\partial f^l}{\partial x^{r+1}}[x^1,\cdots,x^{r+1},\varphi^1(x,\tilde{y}),\cdots,$$

$$\varphi^p(x,\tilde{y})]-\sum_{k=1}^{p}\lambda^l_k[x^1,\cdots,x^{r+1},\varphi^1(x,\tilde{y}),\cdots,\varphi^p(x,\tilde{y})]\cdot$$

$$\psi^k_{r+1}[x^1,\cdots,x^{r+1},\varphi^1(x,\tilde{y}),\cdots,\varphi^p(x,\tilde{y})],$$

普法夫形式 $\tilde{\pi}^l$ 应满足弗罗贝尼乌斯条件.

$$d\tilde{\pi}^l=dd\tilde{y}^l-\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial\tilde{\lambda}^l}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{r+1}-\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\tilde{\lambda}^l}{\partial\tilde{y}^k}d\tilde{y}^k\wedge dx^{r+1},$$

而 $d\tilde{y}^k=\tilde{\pi}^k+\tilde{\lambda}^k dx^{r+1}$，所以

$$d\tilde{\pi}^l=-\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial\tilde{\lambda}^l}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{r+1}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\tilde{\lambda}^l}{\partial\tilde{y}^k}dx^{r+1}\wedge\tilde{\pi}^k,$$

$$l=1,\cdots,p.$$

如果普法夫形式 $\tilde{\pi}^l(l=1,\cdots,p)$ 满足弗罗贝尼乌斯条件

$$d\tilde{\pi}^l=\sum_{k=1}^{p}\tilde{f}^l_k\wedge\tilde{\pi}^k,\ l=1,\cdots,p,$$

则必须有

$$\frac{\partial\tilde{\lambda}^l}{\partial x^i}=0,i=1,\cdots,r;l=1,\cdots,p,$$

即 $\tilde{\lambda}^l$ 只是 $x^{r+1},\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^p$ 的函数. 所以普法夫方程组 $\tilde{\pi}^l=0\ (l=1,\cdots,p)$ 应写成

$$\tilde{\pi}^l\equiv d\tilde{y}^l-\tilde{\lambda}^l(x^{r+1},\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^p)dx^{r+1}=0,l=1,\cdots,p.$$

它实际上就是常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{y}^l}{\mathrm{d}x^{r+1}} = \tilde{\lambda}^l(x^{r+1}, \tilde{y}^1, \cdots, \tilde{y}^p), l = 1, \cdots, p,$$

给出初始条件:$x^{r+1} = x_0^{r+1}$ 时,

$$\tilde{y}^l = f^l(x_0^1, \cdots, x_0^r, x_0^{r+1}, y_0^1, \cdots, y_0^p), l = 1, \cdots, p,$$

方程组存在惟一解

$$\tilde{y}^l = f^l(x^1, \cdots, x^r, x^{r+1}, y^1, \cdots, y^p) = \varphi^l(x^{r+1}), l = 1, \cdots, p.$$

再从这组方程中解出 $y^1, \cdots, y^p$,我们就得到满足初始条件的积分曲面的方程

$$y^l = y^l(x^1, \cdots, x^r, x^{r+1}), l = 1, \cdots, p.$$

定理证毕.

推论 给出一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial y^l}{\partial x^i} = \varphi_i^l(x, y), i = 1, \cdots, n; l = 1, \cdots, p,$$

如果它满足条件

$$\frac{\partial \varphi_j^l}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \varphi_j^l}{\partial y^k} \varphi_i^k = \frac{\partial \varphi_i^l}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \varphi_i^l}{\partial y^k} \varphi_j^k,$$

$$i, j = 1, \cdots, n; l = 1, \cdots, p,$$

则这方程组完全可积.

证明 这个一阶偏微分方程组等价于普法夫方程组

$$\pi^l \equiv \mathrm{d}y^l - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^l(x, y) \mathrm{d}x^i = 0, l = 1, \cdots, p,$$

推论中的条件相当于普法夫形式 $\pi^l (l=1, \cdots, p)$ 的弗罗贝尼乌斯条件. 根据上述定理,普法夫方程组 $\pi^l = 0 (l=1, \cdots, p)$ 完全可积.

实例:解普法夫方程

$$\omega \equiv P(x, y, z) \mathrm{d}x + Q(x, y, z) \mathrm{d}y + R(x, y, z) \mathrm{d}z = 0,$$

假定它满足弗罗贝尼乌斯条件.

解 给出初始条件:

$$当 x = x_0, y = y_0 时, z = z_0,$$

命 $\tilde{\omega}=\omega|_{y=y_0}$，考虑普法夫方程

$$\tilde{\omega}=P(x,y_0,z)\mathrm{d}x+R(x,y_0,z)\mathrm{d}z=0,$$

此时 $n=1$，不用弗罗贝尼乌斯条件. 它等价于常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{P(x,y_0,z)}{R(x,y_0,z)}$$

（如果 $R(x,y_0,z)\equiv 0$，则这方程变成 $\mathrm{d}x=0$），给出初始条件：

$$\text{当 } x=x_0 \text{ 时}, z=z_0,$$

则这方程存在惟一解

$$z-z_0=\varphi(x,y_0)-\varphi(x_0,y_0),$$

或

$$\tilde{f}(x,y_0,z)\equiv z-\varphi(x,y_0)=z_0-\varphi(x_0,y_0).$$

因此存在函数 $\tilde{\lambda}(x,y_0,z)$ 使得

$$\mathrm{d}\tilde{f}=\tilde{\lambda}(x,y_0,z)\tilde{\omega}.$$

现在把 y_0 改回成 y，命

$$\lambda(x,y,z)=\tilde{\lambda}(x,y_0,z)|_{y_0\to y},$$

$$f(x,y,z)=\tilde{f}(x,y_0,z)|_{y_0\to y}.$$

注意

$$\omega\equiv\tilde{\omega}|_{y_0\to y}+Q(x,y,z)\mathrm{d}y,$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f&=\mathrm{d}\tilde{f}|_{y_0\to y}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\\&=\tilde{\lambda}(x,y_0,z)|_{y_0\to y}\tilde{\omega}|_{y_0\to y}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\\&=\lambda(x,y,z)[\omega-Q(x,y,z)\mathrm{d}y]+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

因此普法夫方程 $\omega=0$ 等价于普法夫方程

$$\pi\equiv\mathrm{d}f-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\lambda(x,y,z)Q(x,y,z)\mathrm{d}y=0.$$

注意

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}\Big|_{y_0\to y}=\frac{\partial}{\partial z}(z-\varphi(x,y))=1,$$

根据逆函数定理，局部上可以从

$$\tilde{z}=f(x,y,z)=z-\varphi(x,y)$$

反解出

$$z=\psi(x,y,\tilde{z}),$$

因此普法夫方程 $\pi=0$ 变成

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}&=\mathrm{d}\tilde{z}-\left\{\frac{\partial f}{\partial y}-\lambda[x,y,\psi(x,y,\tilde{z})]Q[x,y,\psi(x,y,\tilde{z})]\right\}\mathrm{d}y\\&=\mathrm{d}\tilde{z}-\tilde{\lambda}(x,y,\tilde{z})\mathrm{d}y=0,\end{aligned}$$

其中

$$\tilde{\lambda}(x,y,\tilde{z})=\frac{\partial f}{\partial y}-\lambda[x,y,\psi(x,y,\tilde{z})]Q[x,y,\psi(x,y,\tilde{z})].$$

根据命题 6，由于普法夫形式 ω 满足弗罗贝尼乌斯条件，所以与它等价的普法夫方程 $\tilde{\pi}=0$ 也满足弗罗贝尼乌斯条件. 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{\pi}&=\mathrm{d}\mathrm{d}\tilde{z}-\mathrm{d}\tilde{\lambda}\wedge\mathrm{d}y=-\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\tilde{z}}\mathrm{d}\tilde{z}\wedge\mathrm{d}y\\&=-\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\tilde{z}}(\tilde{\pi}+\tilde{\lambda}\,\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}y\\&=-\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\tilde{z}}\mathrm{d}y\wedge\tilde{\pi},\end{aligned}$$

所以普法夫形式 $\tilde{\pi}$ 的弗罗贝尼乌斯条件是

$$\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial x}=0,$$

即函数 $\tilde{\lambda}$ 与变量 x 无关，因此普法夫方程 $\tilde{\pi}=0$ 可以改写成

$$\tilde{\pi}\equiv\mathrm{d}\tilde{z}-\tilde{\lambda}(y,\tilde{z})\mathrm{d}y=0,$$

它等价于常微分方程

$$\frac{d\tilde{z}}{dy}=\tilde{\lambda}(y,\tilde{z}),$$

给出初始条件：

$$当\ y=y_0\ 时，\tilde{z}=z_0-\varphi(x_0,y_0).$$

这方程存在惟一解

$$\tilde{z}\equiv z-\varphi(x,y)=\theta(y),$$

或

$$z=\varphi(x,y)+\theta(y),$$

这就是过(x_0,y_0,z_0)点的积分曲面的方程.

习　题

1. 设 V 是 n 维实向量空间，$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是它的一组基，命 $\alpha=e_1\wedge\cdots\wedge e_p(0<p<n)$. 设 V 中一向量 v 满足 $v\wedge\alpha=0$. 求证：v 是 $e_1,\cdots,e_p$ 的线性组合.

2. 设 V 是 n 维实向量空间，$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是它的一组基，命 $\alpha=e_1\wedge e_2+\cdots+e_{2r-1}\wedge e_{2r}$ 求证：$\alpha^r=\underbrace{\alpha\wedge\cdots\wedge}_{r个}\alpha\neq0,\alpha^{r+1}=0$.

3. 设 $\omega=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_{ij}\ dx^i\wedge dx^j,a_{ij}+a_{ji}=0$，求证：

$$d\omega=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}\right)dx^i\wedge dx^j\wedge dx^k.$$

4. 寻找一个$(n-1)$一形式 φ，使用

$$d\varphi=dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

5. 给出普法夫形式 $\omega=yzdx+zxdy+xydz$，求证它满足弗罗贝尼乌斯条件，并求普法夫方程 $\omega=0$ 的通解.

§2 活动标架

2.1 合同变换群

定义 $\mathbf{R}^3$ 到自身的映射，如果它保持距离不变，则称为空间

合同变换.

实例:$\mathbf{R}^3$ 中的平移,旋转和对某一平面的反射都是合同变换.

根据这个定义,由于合同变换保持距离不变,它使三角形变成与它全等的三角形,因此也保持角度不变,于是也保持两向量的内积不变. 特别地,合同变换把两两正交的单位向量变成两两正交的单位向量.

下面我们来推导合同变换的公式.

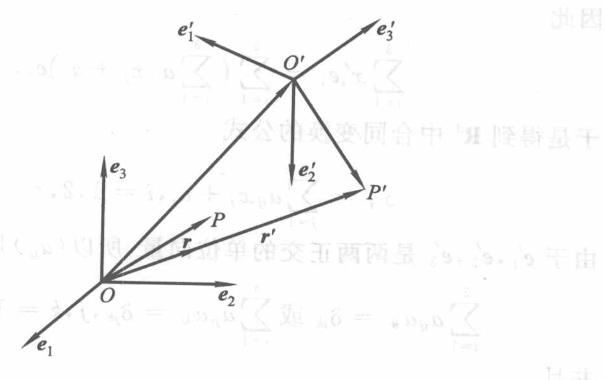


图 3-2

如图 3-2 所示,设$[O;e_1,e_2,e_3]$是 $\mathbf{R}^3$ 的直角坐标系,O 是原点,e_1,e_2,e_3 是从 O 出发的两两正交的单位向量.设

$$r=\overrightarrow{OP}=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3,$$

即 P 点的坐标是(x_1,x_2,x_3),经过合同变换 T,P 点变成 P'点,

$$\overrightarrow{OP'}=x'_1e_1+x'_2e_2+x'_3e_3.$$

现在我们要确定合同变换 T 的表达式,即 P 点的坐标(x_1,x_2,x_3)与对应的 P'点的坐标(x'_1,x'_2,x'_3)之间的表达式.

设合同变换 T 把直角坐标系$[O;e_1,e_2,e_3]$变成直角坐标系$[O';e'_1,e'_2,e'_3]$,设

$$\overrightarrow{OO'}=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3,$$

$$e'_i=a_{1i}e_1+a_{2i}e_2+a_{3i}e_3,\ i=1,2,3.$$

由于合同变换保持距离和角度不变，所以

$$\overrightarrow{O'P'} = x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + x_3 e'_3,$$

$$\begin{aligned} r' &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'} \\ &= \sum_{i=1}^{3} a_i e_i + \sum_{j=1}^{3} x_j e'_j \\ &= \sum_{i=1}^{3} a_i e_i + \sum_{i,j=1}^{3} x_j a_{ij} e_i, \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{i=1}^{3} x'_i e_i = \sum_{i=1}^{3} \Big(\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j + a_i \Big) e_i,$$

于是得到 $\mathbf{R}^3$ 中合同变换的公式

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j + a_i, i = 1,2,3.$$

由于 e'_1, e'_2, e'_3 是两两正交的单位向量，所以(a_{ij})是正交矩阵，即

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \text{ 或} \sum_{i=1}^{3} a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk}, j,k = 1,2,3,$$

并且

$$\Delta = \det(a_{ij}) = \pm 1.$$

从空间合同变换的表达式可以看出，任何一个空间合同变换是由下列三种合同变换组合而成.

绕过原点 O 的轴的旋转：

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j, i = 1,2,3, \Delta = \det(a_{ij}) = +1;$$

平移：

$$x'_i = x_i + a_i, i = 1,2,3;$$

对坐标平面的反射：

$$x'_1 = x_1, x'_2 = x_2, x'_3 = -x_3.$$

当 $\Delta = +1$ 时，空间合同变换由平移和绕过原点 O 的轴的旋转组合而成，它保持右手坐标系不变；当 $\Delta = -1$ 时，空间合同变换中

包括奇数个反射，它使右手坐标系变成左手坐标系.

注意，每一个空间合同变换 T 实际上由它在直角坐标系 $[O;e_1,e_2,e_3]$ 上的作用所确定，即如果

$$TO=O',O'\text{的坐标是}(a_1,a_2,a_3),$$

$$Te_i = e'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ji}e_j, i = 1,2,3,$$

则 T 的变换公式就完全确定了. 因此我们可以用直角坐标系 $[O';e'_1,e'_2,e'_3]$ 来表示一个合同变换 T. 以后我们把 $[O';e'_1,e'_2,e'_3]$ 称为 $\mathbf{R}^3$ 中的标架.

命题 7 $\mathbf{R}^3$ 中全体合同变换构成一个群，称为空间合同变换群.

证明 因为

(1) 空间两个合同变换的组合还是一个空间合同变换；

(2) 空间三个合同变换的组合满足结合律；

(3) 恒同变换 $I:x'_i=x_i(i=1,2,3)$ 与空间任何合同变换 T 的组合 $I\circ T=T\circ I=T$，因此 I 对于空间合同变换的组合来说是单位元素；

(4) 空间任何合同变换一定有逆变换，而且这个逆变换还是空间合同变换.

注意，空间合同变换群可以看成是 $\mathbf{R}^3$ 中全体标架的集合，因为 $\mathbf{R}^3$ 中每一个标架确定了一个空间合同变换.

2.2 活动标架

上一小节中我们已定义了 $\mathbf{R}^3$ 中一个标架是 $\mathbf{R}^3$ 中一点 O' 和从 O' 点出发的三个有序的两两正交的单位向量. $\mathbf{R}^3$ 中的合同变换群 G 的元素（即空间合同变换）与 $\mathbf{R}^3$ 中的标架是一一对应的，并且对合同变换的组合来讲仍保持对应的关系. 因此，我们可以把 $\mathbf{R}^3$ 中的标架看成空间合同变换群的元素的具体表示.

从现在起我们把 $\mathbf{R}^3$ 中的标架记成 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$，其中向量 $\boldsymbol{r}=$

$\overrightarrow{OO'}$，e_1,e_2,e_3 表示从 O' 出发的三个有序的两两正交的单位向量(注意，以后我们不再用上一小节中的符号 e'_1,e'_2,e'_3).

设标架 $\{r;e_1,e_2,e_3\}$ 是变动的，它光滑地依赖于 p 个参数，也就是说：向量 r,e_1,e_2,e_3 是 p 个参数 $u^1,\cdots,u^p$ 的 C^∞-函数，

$$r=r(u^1,\cdots,u^p),e_i=e_i(u^1,\cdots,u^p),i=1,2,3,$$

称 $\{r;e_1,e_2,e_3\}$ 为 p 参数的**活动标架**．由于 $\mathbf{R}^3$ 中的标架的自由度为 6(原点的三个坐标，还有三个欧拉角)，所以活动标架的参数不能多于 6．p 参数的活动标架的全体构成空间合同变换群 G 的 p 维子空间．嘉当 (E. Cartan)的活动标架法的主要思想是：通过活动标架这个桥梁把微分几何中所研究的图形嵌入到空间合同变换群 G 中去，也就是把这图形看成 G 的子空间，然后 G 的性质自然地传递到它的子空间上，从而得到我们所要研究的图形的性质．这是克莱因 (F. Klein)的爱尔朗根 (Erlangen)纲领的精神在微分几何中的体现．

例 (1) 单参活动标架．给出一条空间曲线 (C)：

$$r=r(s),$$

曲线上每一点 $r(s)$，对应一伏雷内标架 $e_1(s),e_2(s),e_3(s)$，其中

$$e_1(s)=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s},\ e_2(s)=\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}\bigg/\left|\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}\right|,\ e_3(s)=e_1(s)\times e_2(s),$$

于是 $\{r(s);\ e_1(s),\ e_2(s),\ e_3(s)\}$ 构成单参活动标架．因此，一条空间曲线 (C) 可以看成空间合同变换群的1维子空间．

(2) 双参数活动标架．给出一个曲面 (S)：

$$r=r(u,v),$$

其上选取正交坐标网，则曲面 (S) 上任一点 $r(u,v)$ 处存在三个有序的两两正交的单位向量

$$e_1(u,v)=r_u/|r_u|,\ e_2(u,v)=r_v/|r_v|,\ e_3(u,v)=n(u,v),$$

其中 $n(u,v)$ 是曲面在 $r(u,v)$ 点的单位法向量．$\{r(u,v);\ e_1(u,v),\ e_2(u,v),\ e_3(u,v)\}$ 构成双参数活动标架．因此，一个曲面 (S) 可以看成空间合同变换群的 2 维子空间．

根据以上分析，要研究空间中图形的性质，首先要把空间合同变换群 G 的性质弄清楚．现在，我们已经把空间合同变换群理解成 $\mathbf{R}^3$ 中全体标架的集合，因此要研究空间合同变换群 G，实际上是研究与它对应的 6 参数活动标架 $\{\boldsymbol{r}(v^1,\cdots,v^6);\ \boldsymbol{e}_i(v^1,\cdots,v^6)\}$，至于 p 参数的活动标架（$p\leqslant 6$）则是 G 的 p 维子空间，即

$$v^i = v^i(u^1,\cdots,u^p),\ i=1,\cdots,6.$$

所以 p 参数的活动标架可以表示成

$$\{\boldsymbol{r}[v^1(u^1,\cdots,u^p),\cdots,v^6(u^1,\cdots,u^p)];$$
$$\boldsymbol{e}_i[v^1(u^1,\cdots,u^p),\cdots,v^6(u^1,\cdots,u^p)]\},$$

简写成

$$\{\boldsymbol{r}(u^1,\cdots,u^p);\ \boldsymbol{e}_i(u^1,\cdots,u^p)\}.$$

对于 $\mathbf{R}^3$ 中 p 参数活动标架来说，最重要的有两个：一个是活动标架的无穷小位移，另一个是它的结构方程．

所谓活动标架 $\{\boldsymbol{r}(u^1,\cdots,u^p);\ \boldsymbol{e}_i(u^1,\cdots,u^p)\}$ 的无穷小位移是指它们的微分

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\omega^i(u,\mathrm{d}u)\boldsymbol{e}_i, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{3}\omega_i^j(u,\mathrm{d}u)\boldsymbol{e}_j, \end{cases} \quad i=1,2,3,$$

其中 $\omega^i(u,\mathrm{d}u)$ 和 $\omega_i^j(u,\mathrm{d}u)$ 是系数为 $(u^1,\cdots,u^p)$ 的 C^∞-函数的 $\mathrm{d}u^1,\cdots,\mathrm{d}u^p$ 的普法夫形式，它们称为活动标架 $(\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_i)$ 的**相对分量**．活动标架的相对分量刻画了活动标架的无穷小位移．

普法夫形式 $\omega_i^j(i,j=1,2,3)$ 不都是独立的．由于 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是两两正交的单位向量，所以

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij},\ i,j=1,2,3,$$

微分上式得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{e}_j = 0,$$

所以

$$\sum_{k=1}^{3}\omega_i^k \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_j + \sum_{k=1}^{3}\boldsymbol{e}_i \cdot \omega_j^k \boldsymbol{e}_k = 0,$$

即

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0,\ i,j = 1,2,3.$$

所以

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0,$$

$$\omega_1^2 = -\omega_2^1,\ \omega_2^3 = -\omega_3^2,\ \omega_3^1 = -\omega_1^3.$$

因此相对分量 ω^i 和 ω_i^j 中,只需用到其中六个:$\omega^1,\omega^2,\omega^3,\omega_1^2,\omega_2^3,\omega_3^1$.

实例:考虑双参数活动标架

$$\{\boldsymbol{r}(u,v);\ \boldsymbol{e}_1(u,v),\ \boldsymbol{e}_2(u,v),\ \boldsymbol{e}_3(u,v)\},$$

其中

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$$

是曲面(S)的方程,其上已选取正交坐标网.

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{r}_u/|\boldsymbol{r}_u| = \frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}},\ \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{r}_v/|\boldsymbol{r}_v| = \frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}},\ \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{n},$$

其中 E,G 是曲面(S)的第一类基本量. 注意,由于坐标网正交,所以 $F=0$.

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v = (\sqrt{E}\mathrm{d}u)\boldsymbol{e}_1 + (\sqrt{G}\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_2,$$

因而

$$\omega^1 = \sqrt{E}\mathrm{d}u,\ \omega^2 = \sqrt{G}\mathrm{d}v,\ \omega^3 = 0,$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1 = \mathrm{d}(\boldsymbol{r}_u/\sqrt{E}) = \frac{\boldsymbol{r}_{uu}\mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_{uv}\mathrm{d}v}{\sqrt{E}} - \frac{(E_u\mathrm{d}u + E_v\mathrm{d}v)\boldsymbol{r}_u}{2E^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E}}[(\Gamma_{11}^1\boldsymbol{r}_u + \Gamma_{11}^2\boldsymbol{r}_v + L\boldsymbol{n})\mathrm{d}u + (\Gamma_{12}^1\boldsymbol{r}_u + \Gamma_{12}^2\boldsymbol{r}_v +$$

$$M\boldsymbol{n})\mathrm{d}v] - \frac{1}{2E}(E_u\mathrm{d}u + E_v\mathrm{d}v)\cdot\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}}$$

$$= \left(\Gamma_{11}^1\mathrm{d}u + \Gamma_{12}^1\mathrm{d}v - \frac{E_u\mathrm{d}u + E_v\mathrm{d}v}{2E}\right)\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}} +$$

$$(\Gamma_{11}^2 \mathrm{d}u + \Gamma_{12}^2 \mathrm{d}v) \frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{E}} + \frac{1}{\sqrt{E}}(L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v)\boldsymbol{n}$$

$$= \left(\Gamma_{11}^1 \mathrm{d}u + \Gamma_{12}^1 \mathrm{d}v - \frac{E_u \mathrm{d}u + E_v \mathrm{d}v}{2E}\right)\boldsymbol{e}_1 +$$

$$\sqrt{\frac{G}{E}}(\Gamma_{11}^2 \mathrm{d}u + \Gamma_{12}^2 \mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{E}}(L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_3.$$

同理

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2 = \mathrm{d}(\boldsymbol{r}_v / \sqrt{G}) = \sqrt{\frac{E}{G}}(\Gamma_{12}^1 \mathrm{d}u + \Gamma_{22}^1 \mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_1 +$$

$$\left(\Gamma_{12}^2 \mathrm{d}u + \Gamma_{22}^2 \mathrm{d}v - \frac{G_u \mathrm{d}u + G_v \mathrm{d}v}{2G}\right)\boldsymbol{e}_2 +$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}}(M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_3.$$

但是对于正交坐标网来说

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G},$$

$$\mu_1^1 = -\frac{L}{E}, \quad \mu_1^2 = -\frac{M}{G},$$

$$\mu_2^1 = -\frac{M}{E}, \quad \mu_2^2 = -\frac{N}{G},$$

因此

$$\omega_1^1 = 0, \ \omega_2^2 = 0,$$

$$\omega_1^3 = \frac{1}{\sqrt{E}} (L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v),$$

$$\omega_2^3 = \frac{1}{\sqrt{G}}(M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v),$$

$$\omega_1^2 = -\omega_2^1 = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_v \mathrm{d}u - G_u \mathrm{d}v),$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 = \mathrm{d}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_u \mathrm{d}u + \boldsymbol{n}_v \mathrm{d}v$$

$$= (\mu_1^1 \boldsymbol{r}_u + \mu_1^2 \boldsymbol{r}_v)\mathrm{d}u + (\mu_2^1 \boldsymbol{r}_u + \mu_2^2 \boldsymbol{r}_v)\mathrm{d}v$$

$$= -\frac{1}{E}(L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v)\boldsymbol{r}_u - \frac{1}{G}(M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v)\boldsymbol{r}_v$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{E}}(L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{G}}(M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v)\boldsymbol{e}_2.$$

所以

$$\omega_3^1 = -\frac{1}{\sqrt{E}}(L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v) = -\omega_1^3,$$

$$\omega_3^2 = -\frac{1}{\sqrt{G}}(M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v) = -\omega_2^3.$$

根据命题 4(Poincaré 引理),于是有

$$\mathrm{dd}\boldsymbol{r} = 0,\ \mathrm{dd}\boldsymbol{e}_i = 0,\ i = 1,2,3.$$

根据 $\mathrm{dd}\boldsymbol{r} = 0$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} \omega^i \boldsymbol{e}_i$ 应用命题 5,

$$\mathrm{dd}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\Big(\sum_{i=1}^{3} \omega^i \boldsymbol{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}\omega^i \boldsymbol{e}_i - \sum_{i=1}^{3} \omega^i \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{e}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \Big(\mathrm{d}\omega^i - \sum_{j=1}^{3} \omega^j \wedge \omega_j^i\Big)\boldsymbol{e}_i = 0,$$

所以

$$\mathrm{d}\omega^i = \sum_{j=1}^{3} \omega^j \wedge \omega_j^i,\ i = 1,2,3.$$

根据 $\mathrm{dd}\boldsymbol{e}_i = 0 (i = 1,2,3)$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j \boldsymbol{e}_j (i = 1,2,3)$,还用命题 5,

$$\mathrm{dd}\boldsymbol{e}_i = \mathrm{d}\Big(\sum_{j=1}^{3} \omega_i^j \boldsymbol{e}_j\Big) = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{d}\omega_i^j \boldsymbol{e}_j - \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{e}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \Big(\mathrm{d}\omega_i^j - \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j\Big)\boldsymbol{e}_j = 0,$$

所以

$$\mathrm{d}\omega_i^j = \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j,\ i,j = 1,2,3.$$

于是我们得到活动标架$\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$的相对分量 ω^i 和 ω_i^j 应满足的条件

$$\begin{cases}\mathrm{d}\omega^i = \sum_{j=1}^{3}\omega^j \wedge \omega_j^i, \omega_i^j + \omega_j^i = 0, \\ \mathrm{d}\omega_i^j = \sum_{k=1}^{3}\omega_i^k \wedge \omega_k^j,\ i,j = 1,2,3.\end{cases}$$

上式称为活动标架$\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$的**结构方程**.

实例：现在我们来讨论双参数活动标架的结构方程. 前面三个结构方程

$$\mathrm{d}\omega^i = \sum_{j=1}^{3}\omega^j \wedge \omega_j^i,\ i = 1,2,3$$

可以用来计算 $\omega_1^2, \omega_2^3, \omega_3^1$. 例如，$\omega^3 = 0$ 所以

$$\mathrm{d}\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 = 0,$$

根据嘉当引理，存在函数 $a(u,v)$, $b(u,v)$和 $c(u,v)$使得

$$\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2,$$

$$\omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2,$$

以后我们将说明系数 a,b,c 的几何意义.

再设

$$\omega_1^2 = g_1(u,v)\mathrm{d}u + g_2(u,v)\mathrm{d}v,$$

因为 $\omega^1 = \sqrt{E}\mathrm{d}u$, $\omega^2 = \sqrt{G}\mathrm{d}v$, 所以

$$\omega_1^2 = \frac{g_1}{\sqrt{E}}\omega^1 + \frac{g_2}{\sqrt{G}}\omega^2,$$

$$\mathrm{d}\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega_2^1 = \omega^2 \wedge -\left(\frac{g_1}{\sqrt{E}}\omega^1 + \frac{g_2}{\sqrt{G}}\omega^2\right) = \frac{g_1}{\sqrt{E}}\omega^1 \wedge \omega^2,$$

$$\mathrm{d}\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2 = \omega^1 \wedge \left(\frac{g_1}{\sqrt{E}}\omega^1 + \frac{g_2}{\sqrt{G}}\omega^2\right) = \frac{g_2}{\sqrt{G}}\omega^1 \wedge \omega^2,$$

从而

$$\frac{g_1}{\sqrt{E}} = \frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2},\ \frac{g_2}{\sqrt{G}} = \frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2},$$

因此①

$$\omega_1^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2}\right)\omega^1 + \left(\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}\right)\omega^2.$$

再讨论后六个(只有三个独立)结构方程

$$\mathrm{d}\omega_i^j = \sum_{k=1}^{3}\omega_i^k \wedge \omega_k^j,\ i,j = 1,2,3.$$

我们已经知道,它们等价于

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i) = 0,\ i = 1,2,3.$$

因为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial v}\mathrm{d}v,\ i = 1,2,3,$$

所以 $\mathrm{dd}\boldsymbol{e}_i=0(i=1,2,3)$等价于

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{e}_i}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{e}_i}{\partial u \partial v},\ i = 1,2,3.$$

当 $i=3$ 时 $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{n}$,上式变成

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}_u}{\partial v} = \frac{\partial \boldsymbol{n}_v}{\partial u},$$

这就是科达齐-迈因纳尔迪公式. 上式等价于 $\mathrm{dd}\boldsymbol{e}_3=0$,可是后者又等价于结构方程

$$\mathrm{d}\omega_3^1 = \omega_3^2 \wedge \omega_2^1,$$
$$\mathrm{d}\omega_3^2 = \omega_3^1 \wedge \omega_1^2,$$

因此这两个结构方程就是曲面论中的科达齐-迈因纳尔迪公式.

至于另外一个结构方程

$$\mathrm{d}\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2,$$

以后我们将指出,它扮演了高斯公式的角色,也就是说,用它可以证明:曲面的高斯曲率只与第一基本形式有关.

---

① $\mathrm{d}\omega^1$ 和 $\mathrm{d}\omega^2$ 是 2 次形式,因此可以表示成 $\mathrm{d}\omega^1 = f(u^1,u^2)\omega^1 \wedge \omega^2$, $\mathrm{d}\omega^2 = g(u^1,u^2)\omega^1 \wedge \omega^2$, 所以$\frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2} = f(u^1,u^2)$, $\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} = g(u^1,u^2)$.

下面我们将证明活动标架的基本定理：

定理 给出六个 p 参数 $u^1,\cdots,u^p(p\leqslant 6)$ 的普法夫形式

$$\omega^1(u,\mathrm{d}u),\ \omega^2(u,\mathrm{d}u),\ \omega^3(u,\mathrm{d}u),$$
$$\omega_1^2(u,\mathrm{d}u),\ \omega_2^3(u,\mathrm{d}u),\ \omega_3^1(u,\mathrm{d}u),$$

如果它们满足结构方程

$$\mathrm{d}\omega^i=\sum_{j=1}^3\omega^j\wedge\omega_j^i,\ i=1,2,3,$$

$$\mathrm{d}\omega_i^j=\sum_{k=1}^3\omega_i^k\wedge\omega_k^j,\ i,j=1,2,3,$$

其中

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0,\ i,j=1,2,3,$$

则存在 p 参数活动标架

$$\{\boldsymbol{r}(u^1,\cdots,u^p);\ \boldsymbol{e}_i(u^1,\cdots,u^p)\},\ i=1,2,3,$$

它们的相对分量就是给定的普法夫形式 ω^i 和 ω_i^j，并且满足同一结构方程的不同的 p 参数活动标架之间只差一空间位置.

证明 用给定的普法夫方程构造以 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3)$ 为未知函数的普法夫方程组

$$\begin{cases}\pi=\mathrm{d}\boldsymbol{r}-\omega^1(u,\mathrm{d}u)\boldsymbol{e}_1-\omega^2(u,\mathrm{d}u)\boldsymbol{e}_2-\omega^3(u,\mathrm{d}u)\boldsymbol{e}_3=0,\\ \pi_i=\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i-\omega_i^1(u,\mathrm{d}u)\boldsymbol{e}_1-\omega_i^2(u,\mathrm{d}u)\boldsymbol{e}_2-\omega_i^3(u,\mathrm{d}u)\boldsymbol{e}_3=0,\\ \qquad\qquad i=1,2,3.\end{cases}$$

要判断这个普法夫方程组是否完全可积，必须计算相应的普法夫形式是否满足弗罗贝尼乌斯条件，把方程组的左边外微分一次：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\pi&=\mathrm{d}\mathrm{d}\boldsymbol{r}-\sum_{i=1}^3\mathrm{d}\omega^i\boldsymbol{e}_i+\sum_{i=1}^3\omega^i\wedge\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i\\ &=-\sum_{i=1}^3\mathrm{d}\omega^i\boldsymbol{e}_i+\sum_{i=1}^3\omega^i\wedge\Big(\pi_i+\sum_{j=1}^3\omega_i^j\boldsymbol{e}_j\Big)\\ &=\sum_{i=1}^3\Big(-\mathrm{d}\omega^i+\sum_{j=1}^3\omega^j\wedge\omega_j^i\Big)\boldsymbol{e}_i+\sum_{i=1}^3\omega^i\wedge\pi_i,\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}\pi_i=\mathrm{d}\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i-\sum_{j=1}^3\mathrm{d}\omega_i^j\boldsymbol{e}_j+\sum_{j=1}^3\omega_i^j\wedge\mathrm{d}\boldsymbol{e}_j$$

$$= -\sum_{j=1}^{3} \mathrm{d}\omega_i^j \boldsymbol{e}_j + \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j \wedge \left(\pi_j + \sum_{k=1}^{3} \omega_j^k \boldsymbol{e}_k\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \left(-\mathrm{d}\omega_i^j + \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j\right)\boldsymbol{e}_j + \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j \wedge \pi_j.$$

所以普法夫形式 π 和 $\pi_i(i=1,2,3)$ 的弗罗贝尼乌斯条件正好是定理中给出的条件

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega^i = \sum_{j=1}^{3} \omega^j \wedge \omega_j^i,\ i = 1,2,3, \\ \mathrm{d}\omega_i^j = \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j,\ i,j = 1,2,3. \end{cases}$$

因此普法夫形式 π 和 $\pi_i(i=1,2,3)$ 满足弗罗贝尼乌斯条件，所以普法夫方程组 $\pi=0, \pi_i=0(i=1,2,3)$ 完全可积. 给出初始条件：

$$u^i = u_0^i(i=1,2,3)\text{时}, \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{e}_i=(\boldsymbol{e}_i)_0(i=1,2,3),$$

存在惟一一组 p 参数活动标架

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1,\cdots,u^p),\ \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i(u^1,\cdots,u^p), i=1,2,3,$$

其中条件 $\omega_i^j + \omega_j^i = 0(i,j=1,2,3)$ 保证 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 是两两正交的单位向量. 注意，不同的初始条件意味着不同的初始标架，它们之间差一空间合同变换，因此不同的初始条件所确定的不同的解之间只差一空间合同. 定理证毕.

2.3 活动标架法

活动标架法是微分几何中研究空间图形的方法，它的特点是把图形的研究安排好一定的程序，然后有步骤地去分析图形的性质.

在上一小节中我们已经提到，E. Cartan 活动标架法的中心思想是：设法把所要研究的空间图形嵌入到空间合同变换群 G 中去，要达到这个目的，办法是设法找到一族活动标架，使这个图形与这族活动标架一一对应起来. 如果做到了这一点，剩下的问题就是计算这族活动标架的相对分量，以及相对分量应满足的结构方程.

根据以上分析，所谓活动标架法，大体上可以分成以下三个

步骤：

第一步：对于一个 p 参数的空间几何图形，我们设法找一组 p 参数的活动标架

$$\{\boldsymbol{r}(u^1,\cdots,u^p);\boldsymbol{e}_1(u^1,\cdots,u^p),\\ \boldsymbol{e}_2(u^1,\cdots,u^p),\ \boldsymbol{e}_3(u^1,\cdots,u^p)\},$$

使得它与所研究的图形的元素一一对应起来.

第二步：把活动标架$\{\boldsymbol{r};\ \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$微分一次，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\sum_{i=1}^{3}\omega^i\boldsymbol{e}_i,$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i=\sum_{j=1}^{3}\omega_i^j\boldsymbol{e}_j,i=1,2,3,$$

从而得到活动标架的相对分量

$$\omega^i(u,\mathrm{d}u),\ i=1,2,3;\ \omega_i^j(u,\mathrm{d}u),\ i,j=1,2,3,$$

其中

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0,\ i,j=1,2,3.$$

第三步：把所得到的相对分量 $\omega^i(i=1,2,3)$和 $\omega_i^j(i,j=1,2,3)$再外微分一次，从而得到它们应满足的结构方程

$$\mathrm{d}\omega^i=\sum_{j=1}^{3}\omega^j\wedge\omega_j^i,\ i=1,2,3,$$

$$\mathrm{d}\omega_i^j=\sum_{k=1}^{3}\omega_i^k\wedge\omega_k^j,\ i,j=1,2,3.$$

下面我们以空间曲线为例来说明一下这种活动标架法.

给出一条空间曲线(C)

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),$$

其中 s 是曲线(C)的有向弧长.

第一步，我们设法把(C)上的点与单参活动标架

$$\{\boldsymbol{r}(s);\ \boldsymbol{e}_1(s),\ \boldsymbol{e}_2(s),\ \boldsymbol{e}_3(s)\}$$

一一对应起来. 这一点在上一小节的例子中我们已经做到了，因为 $\boldsymbol{r}(s)$就是曲线的方程. 然后再命

$$e_1 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s},\ e_2 = \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}\Big/\left|\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s}\right|,\ e_3 = e_1 \times e_2,$$

换言之,e_1 是曲线(C)的单位切向量,e_2 是单位主法向量,e_3 是单位副法向量.

第二步,计算上述单参活动标架的相对分量

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\cdot \mathrm{d}s = \mathrm{d}s\cdot e_1,$$

所以

$$\omega^1 = \mathrm{d}s,\ \omega^2 = 0,\ \omega^3 = 0.$$

根据 e_2 的选择,$e_2 /\!/ \mathrm{d}e_1$,所以

$$\mathrm{d}e_1 = \omega_1^2 e_2,\ \omega_1^1 = 0,\ \omega_1^3 = 0.$$

定义 $\omega_1^2 = k(s)\mathrm{d}s$,于是得到公式

$$\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s} = k(s)e_2,$$

$$\mathrm{d}e_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3,\ \omega_2^2 = 0,$$

其中 $\omega_2^1 = -\omega_1^2 = -k(s)\mathrm{d}s$.

定义 $\omega_2^3 = \tau(s)\mathrm{d}s$,则得到公式

$$\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s} = -k(s)e_1 + \tau(s)e_3,$$

最后

$$\mathrm{d}e_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2,\ \omega_3^3 = 0,$$

其中 $\omega_3^1 = -\omega_1^3 = 0$, $\omega_3^2 = -\omega_2^3 = -\tau(s)\mathrm{d}s$,于是得到公式

$$\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s} = -\tau(s)e_2.$$

根据以上计算,单参数活动标架的无穷小位移公式实际上就是空间曲线的伏雷内公式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s} = k(s)e_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s} = -k(s)e_1 + \tau(s)e_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s} = -\tau(s)e_2. \end{cases}$$

第三步，计算相对分量应满足的结构方程. 由于 ω_i 和 ω_i^j 都是单参数普法夫形式，它们的外微分为零，因此对于单参数活动标架来说，不存在结构方程. 换言之，对于空间曲线来说，有了伏雷内公式就够了，伏雷内公式不需要可积条件就能确定曲线的方程.

§3 用活动标架法研究曲面

3.1 曲面论的基本定理

现在我们用活动标架法来研究 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面. 设曲面(S)的方程是

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v).$$

第一步，寻找一个双参数活动标架

$$\{\boldsymbol{r}(u,v);\ \boldsymbol{e}_1(u,v),\ \boldsymbol{e}_2(u,v),\ \boldsymbol{e}_3(u,v)\},$$

使得曲面(S)上的点与双参数活动标架一一对应起来. 为此，我们在曲面(S)上选择正交坐标网，然后取 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 就是曲面的向径，并且选 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 分别是坐标曲线的单位切向量，再取 $\boldsymbol{e}_3$ 为曲面的单位法向量 $\boldsymbol{n}$，即

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{r}_1/|\boldsymbol{r}_1| = \frac{1}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_1,$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{r}_2/|\boldsymbol{r}_2| = \frac{1}{\sqrt{G}}\boldsymbol{r}_2,$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{EG}}\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{n}.$$

第二步，计算上述双参数活动标架的相对分量. 为此，我们对活动标架 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 进行微分

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \omega^1\boldsymbol{e}_1 + \omega^2\boldsymbol{e}_2,\ \omega^3 = 0, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_1 = \omega_1^2\boldsymbol{e}_2 + \omega_1^3\boldsymbol{e}_3, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_2 = \omega_2^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2^3\boldsymbol{e}_3, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 = \omega_3^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_3^2\boldsymbol{e}_2, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $\omega_i^j+\omega_j^i=0(i,j=1,2,3)$. 事实上，上面的第二、第三式是曲面$(S)$对于正交坐标网的高斯方程，第四式是魏因加尔吞方程.

第三步，计算相对分量应满足的结构方程. 为此对(3.1)再微分一次，得到

$$\begin{gathered}
\mathrm{d}\omega^1=\omega^2\wedge\omega_2^1,\ \mathrm{d}\omega^2=\omega^1\wedge\omega_1^2,\\
\mathrm{d}\omega^3=\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3=0,\\
\mathrm{d}\omega_1^2=\omega_1^3\wedge\omega_3^2,\ \mathrm{d}\omega_2^3=\omega_2^1\wedge\omega_1^3,\ \mathrm{d}\omega_3^1=\omega_3^2\wedge\omega_2^1,
\end{gathered}\tag{3.2}$$

其中第四个式子是曲面(S)对于正交坐标网的高斯公式，最后两式子是科达齐-迈因纳尔迪公式.

从活动标架的基本定理，我们得到用活动标架的语言来表达的曲面论的基本定理.

定理（曲面论的基本定理） 给出六个双参数普法夫形式

$$\begin{gathered}
\omega^1(u,v;\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),\ \omega^2(u,v;\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),\ \omega^3(u,v;\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),\\
\omega_1^2(u,v;\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),\ \omega_2^3(u,v;\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),\ \omega_3^1(u,v;\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),
\end{gathered}$$

如果它们满足结构方程(3.2)，并且 $\omega_i^j+\omega_j^i=0(i,j=1,2,3)$，则差一空间合同确定一个双参数活动标架

$$\{\boldsymbol{r}(u,v);\ \boldsymbol{e}_1(u,v),\ \boldsymbol{e}_2(u,v),\ \boldsymbol{e}_3(u,v)\},$$

它的相对分量就是给出的普法夫形式. 活动标架的原点 $\boldsymbol{r}(u,v)$的轨迹是一曲面，$\boldsymbol{e}_1(u,v)$和 $\boldsymbol{e}_2(u,v)$正好是曲面的坐标网的单位切向量，$\boldsymbol{e}_3(u,v)$是曲面的单位法向量.

3.2 曲面的第一和第二基本形式

曲面(S)：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$$

的第一基本形式是

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=(\omega^1\boldsymbol{e}_1+\omega^2\boldsymbol{e}_2)\cdot(\omega^1\boldsymbol{e}_1+\omega^2\boldsymbol{e}_2)\\
&=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2,
\end{aligned}$$

前面我们已经指出

$$\omega^1=\sqrt{E}\mathrm{d}u,\ \omega^2=\sqrt{G}\mathrm{d}v.$$

曲面(S)的只与ω^1和ω^2有关的量为曲面的**内蕴量**. 例如曲面的面积元素

$$\mathrm{d}A = \sqrt{EG}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \omega^1 \wedge \omega^2,$$

此外还有

$$\omega_1^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2}\right)\omega^1 + \left(\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}\right)\omega^2.$$

曲面(S)的第二基本形式是

$$\begin{aligned}\mathrm{II} &= -\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 = -(\omega^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega^2 \boldsymbol{e}_2) \cdot (\omega_3^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_3^2 \boldsymbol{e}_2)\\ &= -\omega^1 \cdot \omega_3^1 - \omega^2 \cdot \omega_3^2\\ &= \omega^1 \cdot \omega_1^3 + \omega^2 \cdot \omega_2^3.\end{aligned}$$

注意:$\omega^1 \cdot \omega_1^3, \omega^2 \cdot \omega_2^3$还有前面的$(\omega^1)^2$和$(\omega^2)^2$都是表示普通乘法,不是外乘.

因为

$$\mathrm{d}\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 = 0,$$

根据嘉当引理

$$\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \ \omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2.$$

所以

$$\mathrm{II} = a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1 \cdot \omega^2 + c(\omega^2)^2,$$

即

$$\mathrm{II} = a \cdot E\mathrm{d}u^2 + 2b \cdot \sqrt{EG}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + cG(\mathrm{d}v)^2,$$

这说明

$$a = L/E, \ b = M/\sqrt{EG}, \ c = N/G.$$

3.3 曲面上的曲线 法曲率 测地曲率和测地挠率

我们先规定指标

$$i,j,k = 1,2,3; \ \alpha,\beta,\gamma = 1,2.$$

如图 3-3 所示,考虑曲面(S),仍取正交坐标网(u^1, u^2),(S)上的曲线(C):

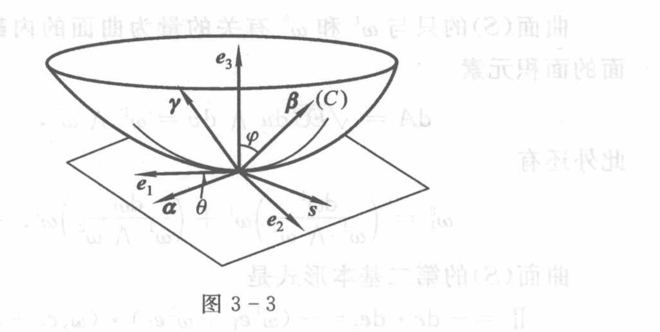


图 3 - 3

$$u^\alpha = u^\alpha(s),$$

s 是(C)的弧长参数. 设(C)的切方向 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 的夹角为 θ,在切平面上作一向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$, 使得$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{e}_3)$构成一右手系,则有

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{e}_1\cos\theta + \boldsymbol{e}_2\sin\theta,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\boldsymbol{e}_1\sin\theta + \boldsymbol{e}_2\cos\theta.$$

命 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 分别为曲线(C)的主法向量和副法向量,φ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 的夹角,有

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\varepsilon}\sin\varphi + \boldsymbol{e}_3\cos\varphi,$$

$$\boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\varepsilon}\cos\varphi + \boldsymbol{e}_3\sin\varphi.$$

再根据曲线(C)的伏雷内公式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s} = k\boldsymbol{\beta}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}s} = -k\boldsymbol{\alpha} + \tau\boldsymbol{\gamma}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s} = -\tau\boldsymbol{\beta}, \end{cases}$$

有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} &= k\mathrm{d}s\boldsymbol{\beta} \\ &= (\mathrm{d}\theta + \omega_1^2)\boldsymbol{\varepsilon} + \\ &\quad (\omega_1^3\cos\theta + \omega_2^3\sin\theta)\boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

曲线(C)的测地曲率是

$$k_g = k\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\theta + \omega_1^2}{\mathrm{d}s}.$$

因为 ω_1^2 和 $\mathrm{d}s$ 只与曲面的第一基本形式有关，所以 k_g 是属于曲面的内蕴性质的.

再考虑曲面的沿(C)的切方向上的法曲率

$$k_n = k\cos\varphi = k\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{e}_3 = (\omega_1^3 \cos\theta + \omega_2^3 \sin\theta)/\mathrm{d}s,$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_2,$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \cos\theta \mathrm{d}s\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \mathrm{d}s\boldsymbol{e}_2,$$

$$\omega^1 = \cos\theta \mathrm{d}s, \ \omega^2 = \sin\theta \mathrm{d}s,$$

所以

$$k_n = (\omega_1^3 \cdot \omega^1/\mathrm{d}s + \omega_2^3 \cdot \omega^2/\mathrm{d}s)/\mathrm{d}s = \frac{\omega^1 \cdot \omega_1^3 + \omega^2 \cdot \omega_2^3}{\mathrm{d}s^2},$$

于是得到

$$k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}.$$

最后我们说明一下测地挠率的概念. 定义曲线(C)的测地挠率 τ_g 为

$$\tau_g = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{\varepsilon},$$

所以

$$\tau_g \mathrm{d}s = -\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathrm{d}(\boldsymbol{\beta}\cos\varphi + \boldsymbol{\gamma}\sin\varphi).$$

再根据曲线(C)的伏雷内公式

$$\tau_g = -\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{\beta}\cos\varphi + \boldsymbol{\gamma}\sin\varphi)$$

$$= -\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}s}\cos\varphi - \boldsymbol{\beta}\sin\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s}\sin\varphi + \boldsymbol{\gamma}\cos\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)$$

$$= -\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \left(-k\cos\varphi\boldsymbol{\alpha} + \tau\cos\varphi\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\beta}\sin\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} - \right.$$

$$\left. \tau\sin\varphi\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}\cos\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)$$

$$= \tau\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\frac{d\varphi}{ds} + \tau\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\frac{d\varphi}{ds}$$

$$= \tau + \frac{d\varphi}{ds},$$

因而

$$\tau_g = \frac{d\varphi}{ds} + \tau.$$

对于 $\varphi=$常数的情形$\left(\text{例如,当}(C)\text{是渐近曲线时} \mathrm{II}=0, \varphi=\frac{\pi}{2}\right)$,$\tau_g = \tau$.

因为

$$d\boldsymbol{e}_3 = \omega_3^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_3^2\boldsymbol{e}_2,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\boldsymbol{e}_1\sin\theta + \boldsymbol{e}_2\cos\theta,$$

$$\tau_g ds^2 = -(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot d\boldsymbol{e}_3)ds$$

$$= (\boldsymbol{e}_1\sin\theta - \boldsymbol{e}_2\cos\theta)\cdot(\omega_3^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_3^2\boldsymbol{e}_2)ds$$

$$= (\omega^2\boldsymbol{e}_1 - \omega^1\boldsymbol{e}_2)(\omega_3^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_3^2\boldsymbol{e}_2) = \omega^2\omega_3^1 - \omega^1\omega_3^2.$$

嘉当把

$$\mathrm{III} = \omega^2\omega_3^1 - \omega^1\omega_3^2$$

称为曲面的**第三基本形式**.

$\mathrm{III}=0 \Rightarrow \tau_g = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}\perp d\boldsymbol{e}_3 \Rightarrow d\boldsymbol{e}_3 /\!/ \boldsymbol{\alpha} \Rightarrow$曲线$(C)$是曲率线. 于是得到曲面上曲率线网的方程为

$$\mathrm{III} = \omega^2\omega_3^1 - \omega^1\omega_3^2 = 0.$$

3.4 曲面的主曲率 欧拉公式 高斯曲率和平均曲率

在上一小节中我们已经证明

$$k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2}.$$

曲面的主曲率是 k_n 的极值,容易证明它们应满足条件

$$\frac{a\omega^1 + b\omega^2}{\omega^1} = \frac{b\omega^1 + c\omega^2}{\omega^2} = k,$$

所以

$$(a-k)(c-k)-b^2=0.$$

于是得到曲面的平均曲率和高斯曲率的公式：

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=\frac{a+c}{2},$$

$$K=k_1k_2=ac-b^2.$$

注意，

$$\begin{aligned}d\omega_1^2=\omega_1^3\wedge\omega_3^2&=(a\omega^1+b\omega^2)\wedge(-b\omega^1-c\omega^2)\\&=(b^2-ac)\omega^1\wedge\omega^2,\end{aligned}$$

所以

$$K=ac-b^2=\frac{-d\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2},$$

因此高斯曲率属于曲面的内蕴性质.

现在考虑以下情形：

(i) e_1 和 e_2 是主方向，这时

$$b=M/\sqrt{EG}=0,\quad a=k_1,\quad c=k_2,$$

$$\omega_1^3=k_1\omega^1,\quad \omega_2^3=k_2\omega^2,$$

所以曲面的第二和第三基本形式变成

$$\mathrm{II}=k_1(\omega^1)^2+k_2(\omega^2)^2,$$

$$\mathrm{III}=(k_2-k_1)\omega^1\omega^2.$$

命 θ 是曲面上曲线(C)的切方向与某一主方向的夹角，前面已证明

$$\omega^1=\cos\theta ds,\ \omega^2=\sin\theta ds,$$

所以

$$k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta,$$

这就是欧拉公式. 此外还有

$$k_g ds=d\theta+\omega_1^2,$$

$$\tau_g=(k_2-k_1)\sin\theta\cos\theta.$$

(ii) 曲线(C)的切方向正好是 $\boldsymbol{e}_1$，这时 $\theta=0$.

$$\omega^1=\mathrm{d}s,\quad \omega^2=0,$$

$$k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=a,$$

$$k_g\,\mathrm{d}s=\omega_1^2,$$

$$\tau_g=\frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}}=b.$$

(iii) 设曲线(C)是渐近曲线，则满足条件 $\mathrm{II}=0$，这时 $\tau_g=\tau$，取(C)的切方向为 $\boldsymbol{e}_1$，则有 $a=0$.

$$K=k_1k_2=ac-b^2=-b^2=-\tau_g^2=-\tau^2,$$

所以

$$\tau=\pm\sqrt{-K},$$

这就是恩内佩尔(Enneper)定理.

3.5 曲面上向量的平行移动

定义 设 $\boldsymbol{v}(u^1,u^2)$是曲面(S)上的向量场，命 $\mathrm{D}\boldsymbol{v}$ 是 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ 在(S)的切平面上的投影，于是 $\mathrm{D}\boldsymbol{v}$ 就是$\boldsymbol{v}$ 的绝对微分.

设 $\boldsymbol{v}=\sum\limits_{\beta}v^\beta\boldsymbol{e}_\beta$. 现在我们来计算$\mathrm{D}\boldsymbol{v}$. 因为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\alpha=\sum_{j=1}^{3}\omega_\alpha^j\boldsymbol{e}_j,\ \alpha=1,2,$$

所以

$$\mathrm{D}\boldsymbol{e}_\alpha=\sum_{\beta=1}^{2}\omega_\alpha^\beta\boldsymbol{e}_\beta,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{v}&=\sum_\beta(\mathrm{d}v^\beta\boldsymbol{e}_\beta+v^\beta\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\beta)\\&=\sum_\beta\mathrm{d}v^\beta\boldsymbol{e}_\beta+\sum_\alpha v^\alpha\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\alpha,\end{aligned}$$

因而

$$\mathrm{D}\boldsymbol{v}=\sum_\beta\Big(\mathrm{d}v^\beta+\sum_\alpha v^\alpha\omega_\alpha^\beta\Big)\boldsymbol{e}_\beta.$$

命

$$\mathrm{D}\boldsymbol{v} = \sum_{\beta} \mathrm{D}v^{\beta}\boldsymbol{e}_{\beta},$$

从而有

$$\mathrm{D}v^{\beta} = \mathrm{d}v^{\beta} + \sum_{\alpha} v^{\alpha}\omega_{\alpha}^{\beta}.$$

给出曲面(S)上一条曲线(C)：

$$u^{\alpha} = u^{\alpha}(s),\ \alpha = 1,2,$$

其中 s 是弧长参数.

定义 曲面上沿曲线(C)的向量场$\boldsymbol{v}[u^{\tau}(s)]$，如果

$$\frac{\mathrm{D}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}s} = 0,\ 或\frac{\mathrm{d}v^{\beta}}{\mathrm{d}s} + \sum_{\alpha} v^{\alpha}\frac{\omega_{\alpha}^{\beta}}{\mathrm{d}s} = 0,\ \beta = 1,2,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}v^{1}}{\mathrm{d}s} + v^{2}\frac{\omega_{2}^{1}}{\mathrm{d}s} = 0,\quad \frac{\mathrm{d}v^{2}}{\mathrm{d}s} + v^{1}\frac{\omega_{1}^{2}}{\mathrm{d}s} = 0,$$

就称$\boldsymbol{v}(u^{\tau}(s))$沿曲线$(C)$是平行的. 若设

$$\omega_{\alpha}^{\beta} = \sum_{\gamma} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta}\mathrm{d}u^{\gamma},$$

则得到平行向量场 $\boldsymbol{v} = \sum_{\beta} v^{\beta}\boldsymbol{e}_{\beta}$ 应满足的微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}v^{\beta}}{\mathrm{d}s} + \sum_{\alpha,\gamma} v^{\alpha}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta}\frac{\mathrm{d}u^{\gamma}}{\mathrm{d}s} = 0,\quad \beta = 1,2.$$

如果在(C)的一点 $u^{\alpha} = u^{\alpha}(s_0)$ 处给出曲面的一个切向量 $\boldsymbol{v}_0 = \sum_{\beta} v_0^{\beta}\boldsymbol{e}_{\beta}$，则上述方程组对于初始条件 $s = s_0$ 时 $v^{\beta} = v_0^{\beta}$，存在惟一解

$$v^{\beta} = v^{\beta}(s),$$

沿曲线(C)的向量场 $\boldsymbol{v} = \sum_{\beta} v^{\beta}\boldsymbol{e}_{\beta}$ 平行于给定的向量$\boldsymbol{v}_0$，这就称为向量$\boldsymbol{v}_0$沿曲线(C)的平行移动.

命题 1 沿曲面上一条曲线平行移动时，保持向量的内积不变.

证明 沿曲线(C)给出两个平行的向量场，在曲面上取正交

坐标网(u^1,u^2)，则

$$\boldsymbol{u}=u^1\boldsymbol{e}_1+u^2\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{v}=v^1\boldsymbol{e}_1+v^2\boldsymbol{e}_2,$$

$$\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s}+u^2\frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s}=0,\quad \frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}s}+v^2\frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s}+u^1\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}=0,\quad \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}s}+v^1\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}=0,$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(u^1v^1+u^2v^2)\\&=\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s}\cdot v^1+u^1\cdot\frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}s}+\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s}\cdot v^2+u^2\cdot\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}s}\\&=(u^2v^1+u^1v^2-u^1v^2-u^2v^1)\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}=0.\end{aligned}$$

推论 沿曲面上一曲线平行移动时，保持向量的长度不变，也保持两方向的夹角不变.

由于沿曲线的平行移动保持长度不变，可以只考虑单位向量场

$$\boldsymbol{v}^\beta=(\cos\theta,\sin\theta),$$

其中θ是$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{e}_1$的夹角. 这时平行条件就简化成

$$\mathrm{d}\theta+\omega_1^2=0.$$

特别地，如果平行移动与路径（曲线(C)）无关，则上面的双参数的普法夫方程是完全可积的，即弗罗贝尼乌斯条件成立. 这时$\mathrm{d}\omega_1^2=0$，所以

$$K=\frac{-\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}=0.$$

于是得到

命题 2 如果曲面的平行移动与路径无关，则这曲面一定是可展曲面.

我们已经知道，曲面上测地曲率为零的曲线称为测地线，设$\tilde{\theta}$为此曲线的切向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{e}_1$的夹角，因为$k_g\,\mathrm{d}s=\mathrm{d}\tilde{\theta}+\omega_1^2$，则测地线的方程是

$$\mathrm{d}\tilde{\theta} + \omega_1^2 = 0.$$

于是得到

命题 3 测地线是它的切线沿它自身平行的曲线，即测地线是自平行曲线.

再设向量场 $\boldsymbol{v}$ 沿测地线平行移动，则

$$\mathrm{d}\theta + \omega_1^2 = 0, \ \mathrm{d}\tilde{\theta} + \omega_1^2 = 0,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 的夹角，$\tilde{\theta}$ 是测地线与 $\boldsymbol{e}_1$ 的夹角，所以

$$\mathrm{d}(\theta - \tilde{\theta}) = 0 \quad 或 \quad \theta - \tilde{\theta} = 常数.$$

因为 $\theta - \tilde{\theta}$ 是 $\boldsymbol{v}$ 和测地线的切方向的夹角，因此得到

命题 4 当向量 $\boldsymbol{v}$ 沿测地线平移时，它与测地线的夹角保持不变.

这命题给出一向量沿测地线平行移动的作法.

3.6 闭曲面的高斯-波涅公式

我们已经知道测地曲率公式是

$$k_g \mathrm{d}s = \mathrm{d}\theta + \omega_1^2.$$

命 G 是曲面上一个单连通区域，假定它的边缘 ∂G 是一条光滑的闭曲线，再规定 ∂G 的正方向如下：使得我们按正方向沿曲线运动时，区域 G 总是在左边(如图 3－4). 把上式沿 ∂G 积分得到

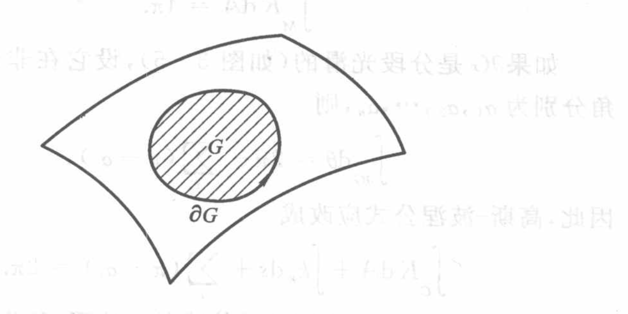


图 3－4

$$\int_{\partial G} k_g \mathrm{d}s = \int_{\partial G} \mathrm{d}\theta + \int_{\partial G} \omega_1^2. \tag{3.3}$$

可以看出

$$\int_{\partial G} \mathrm{d}\theta = 2\pi,$$

并且根据斯托克斯公式

$$\int_{\partial G} \omega_1^2 = \int_G \mathrm{d}\omega_1^2 = -\int_G K\omega^1 \wedge \omega^2,$$

由此代入(3.3)式得到

$$\int_G K\omega^1 \wedge \omega^2 + \int_{\partial G} k_g \mathrm{d}s = 2\pi,$$

这就是曲面论中著名的高斯-波涅公式.

如果区域 G 的边缘∂G 是测地线,则 $k_g = 0$, 于是有

$$\int_G K\mathrm{d}A = 2\pi.$$

对于一个闭曲面 M 来说,用一条光滑的闭曲线(C)把它分成两个部分 G_1 和 G_2,根据高斯-波涅公式有

$$\int_{G_1} K\mathrm{d}A + \int_{\partial G_1} k_g \mathrm{d}s = 2\pi,$$

$$\int_{G_2} K\mathrm{d}A + \int_{\partial G_2} k_g \mathrm{d}s = 2\pi.$$

由于∂G_1 和∂G_2 的定向相反,把上两式相加后得到

$$\int_M K\mathrm{d}A = 4\pi.$$

如果∂G 是分段光滑的(如图 3-5),设它在非光滑点处的内角分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,则

$$\int_{\partial G} \mathrm{d}\theta = 2\pi - \sum_i (\pi - \alpha_i),$$

因此,高斯-波涅公式应改成

$$\int_G K\mathrm{d}A + \int k_g \mathrm{d}s + \sum_i (\pi - \alpha_i) = 2\pi.$$

设 G 是曲面 M 上由测地线构成的 n 边形(称为测地多边形),

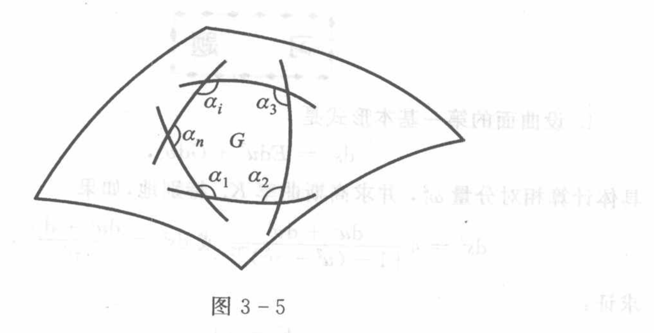


图 3 - 5

因为 $k_g=0$，则有

$$\int_G K\,\mathrm{d}A = 2\pi - \sum_{i=1}^{n}(\pi - \alpha_i).$$

特别地，如果 G 是曲面 M 上的测地三角形，则有

$$\int_G K\,\mathrm{d}A = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \pi.$$

实例：(1) 在半径为 r 的球面上，$K=\frac{1}{r^2}>0$，所以

$$\int_G K\,\mathrm{d}A = \frac{1}{r^2}\int_G \mathrm{d}A = \frac{1}{r^2}\times(\text{球面三角形的面积}),$$

于是从高斯-波涅公式得到球面三角形的面积是

$$A = r^2\int_G K\,\mathrm{d}A = r^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\pi),$$

这说明球面三角形的内角和大于 π.

(2) 在伪球面或罗氏平面上，$K=$ 常数 <0，所以

$$\int_G K\,\mathrm{d}A = K\int_G \mathrm{d}A = K\times(\text{测地三角形的面积}),$$

因而测地三角形的面积公式是

$$A = \frac{1}{K}\int_G K\,\mathrm{d}A = \frac{1}{-K}(\pi-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3),$$

这说明伪球面或罗氏平面上测地三角形的内角和小于 π.

习　　题

1. 设曲面的第一基本形式是

$$ds^2 = E\mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2,$$

具体计算相对分量 ω_1^2，并求高斯曲率 K. 特别地，如果

$$ds^2 = 4\frac{\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2}{[1-(u^2+v^2)]^2} \text{ 或 } ds^2 = \frac{\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2}{v^2},$$

求证：

$$K = -1.$$

2. 设曲面的第一基本形式是

$$ds^2 = [U(u) + V(v)](\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2),$$

计算相对分量 $\omega^1, \omega^2, \omega_1^2$ 和高斯曲率 K.

3. 设曲面的第一基本形式是

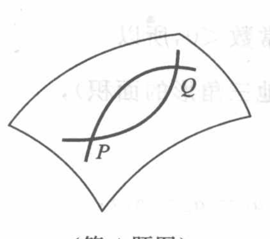
$$ds^2 = \frac{\mathrm{d}u^2 - 4v\mathrm{d}u\mathrm{d}v + 4u\mathrm{d}v^2}{4(u - v^2)} \quad (u > v^2),$$

计算相对分量 $\omega^1, \omega^2, \omega_1^2$ 和高斯曲率 K.

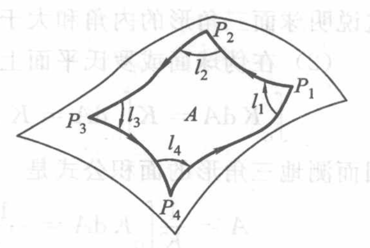
4. 在曲面域中，设其高斯曲率为负或零，试用高斯-波涅公式证明不能有两条测地线交于两点 P, Q(如第 4 题图).

5. 曲面域 A 为四边形，在顶点 P_1, P_2, P_3, P_4 的内角设为 l_1, l_2, l_3, l_4(如第 5 题图)，试证

$$\int_A K\omega^1 \wedge \omega^2 + \int_{\partial A} k_g \mathrm{d}s = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 - 2\pi.$$



（第 4 题图）

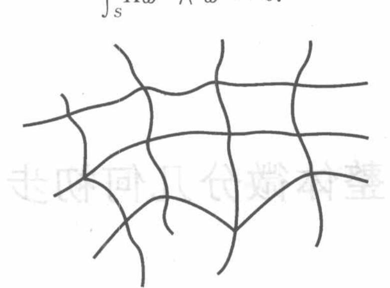


（第 5 题图）

6. 设定向了的闭曲面 S 被剖分成几个四边形，而且各顶点正好集聚四个四边形(如第 6 题图)，试证这时有

$$\int_S K\omega^1 \wedge \omega^2 = 0.$$





（第 6 题图）

7. 对于定向了的闭曲面 S 上定义的一次微分形式 φ，试证

$$\int_S \mathrm{d}\varphi = 0.$$

第四章

整体微分几何初步

在前几章中我们讨论的只是简单曲线或简单曲面，也就是说，我们所研究的只是曲线上同胚于直线上的开线段或曲面上同胚于平面上初等区域的部分. 因此，我们讨论的只是曲线或曲面的局部性质. 与此相反，在初等几何与解析几何中，我们讨论的都是三角形、圆、椭圆等图形的整体性质. 以局部性质为基础来研究图形整体性质的微分几何称为整体微分几何. 本章将介绍这种几何的初步结果.

整体微分几何的名称由德国人 W. Blaschke 首先使用. 他做过一些关于卵形线和卵形面的研究. 今天整体微分几何已经与近代分析结合在一起，发展成为一个新的数学分支——大范围分析，它是近代数学中受人们注意的中心问题之一.

§1 平面曲线的整体性质

在这一节中，我们给出曲线

$$(C):\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\ t\in[a,b],$$

其中 $\boldsymbol{r}\in\mathbf{R}^2$.

我们假定曲线是逐段光滑的，即存在参数序列

$$a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n=b,$$

使得在各区间(a_j,a_{j+1})($j=0,1,2,\cdots,n-1$)上曲线是光滑的，点$\boldsymbol{r}(a_j)$称为曲线的**角点**. 我们还假定除了角点以外，曲线(C)上的

点都是正常点，即 $\boldsymbol{r}'(t)\neq\boldsymbol{0}$. 也就是说，曲线$(C)$是逐段正规的.

如果曲线(C)是整体光滑的，即不存在角点，而且曲线上每一点都是正常点，则我们说曲线(C)是正规的.

1.1 旋转数

给出一条正规的平面曲线(C)，

$$(C):\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\ t\in[a,b].$$

首先沿着它整体地定义伏雷内标架场(即在曲线上的每一点处定义伏雷内标架). 办法是先沿曲线(C)作它的单位切向量场

$$\boldsymbol{\alpha}(t)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|},$$

然后按逆时针方向把 $\boldsymbol{\alpha}$ 绕切点旋转$\frac{\pi}{2}$，则得到曲线(C)的单位法向量场 $\boldsymbol{n}(t)$. 于是得到了沿曲线(C)的伏雷内标架场. 对于这个伏雷内标架场来说伏雷内公式有如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}=k(s)\boldsymbol{n},\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s}=-k(s)\boldsymbol{\alpha}.\end{cases}$$

和过去所讲的平面曲线的伏雷内公式一样，其中 $k(s)$是平面曲线的相对曲率.

定义 一条正规的平面曲线(C)：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$ 称为是闭的，如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$是周期的，即存在常数 $\omega>0$ 使得 $\boldsymbol{r}(t+\omega)=\boldsymbol{r}(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$. 具有这种性质的最小常数 ω 称为曲线(C)的**周期**.

引理 1 设曲线(C)：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$是具有周期 ω 的闭的正规平面曲线，如果把参数换成自然参数，则它的周期是

$$L=\int_0^{\omega}|\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

L 是闭曲线的周长.

证明 $s(t+\omega)=\int_0^{t+\omega}|\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$

$$= \int_0^{\omega} |\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{\omega}^{t+\omega} |\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

因为

$$\boldsymbol{r}(t+\omega) = \boldsymbol{r}(t),$$

所以

$$\boldsymbol{r}'(t+\omega) = \boldsymbol{r}'(t).$$

我们得到

$$s(t+\omega) = L + \int_0^t |\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t = L + s(t),$$

所以有

$$\boldsymbol{r}(s+L) = \boldsymbol{r}(s(t)+L) = \boldsymbol{r}(s(t+\omega)) = \boldsymbol{r}(s(t)) = \boldsymbol{r}(s).$$

定义 正规曲线(C):$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$称为**简单的**,如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在一个周期内是一一的.

例 1 单位圆 $\boldsymbol{r}=\{\cos s, \sin s\}$是简单闭曲线,其周长为 2π,在 $0<s<2\pi$ 范围内,向量函数

$$\boldsymbol{r} = \{\cos s, \sin s\}$$

是一一的.

例 2 曲线 $\boldsymbol{r}=\left\{2\cos\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right), \sin 2\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$不是简单闭曲线. 因为当 $t=0$ 和 $t=\pi$ 时,$\boldsymbol{r}(t)=\{0,0\}$,不是一一的.

定义 给出平面上的正规曲线(C): $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,我们定义从曲线$(C)$到单位圆$(S)$:$\boldsymbol{r}=\{\cos s,\sin s\}$的映射如下:曲线$(C)$的每一点 $\boldsymbol{r}(t)$对应惟一的切向量:

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|},$$

若把它的起点移到平面上坐标原点处,则它的端点在单位圆(S)上,即 $\boldsymbol{\alpha}(t)=\{\cos\theta(t),\sin\theta(t)\}$. 我们把以上从 $\boldsymbol{r}(t)\in(C)$到 $\boldsymbol{\alpha}(t)\in(S)$的映射,称为曲线$(C)$的**切映射**.

在第一章中介绍过可微函数 $\theta(t)$的微分 $\mathrm{d}\theta$ 反映了曲线(C)的切向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的旋转情况. 说得更确切一些,从曲线(C)上一点出发,

沿(C)运动时,这一点的切向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 x 轴正方向夹角的变化率就是$\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$(如图 4-1). 于是有

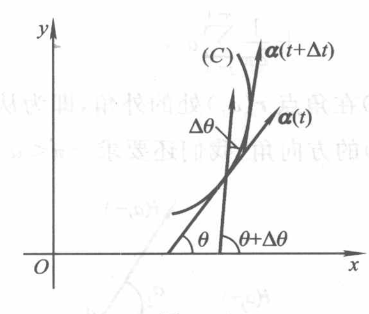


图 4-1

引理 2 $\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}=k(s)\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|.$

证明 $\boldsymbol{\alpha}(t)=\{\cos\theta(t),\sin\theta(t)\},$

$$\boldsymbol{n}(t)=\left\{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$=\{-\sin\theta(t),\cos\theta(t)\},$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}t}=\{-\sin\theta(t)\cdot\theta'(t),\ \cos\theta(t)\cdot\theta'(t)\}$$

$$=\theta'(t)\{-\sin\theta,\cos\theta\}=\theta'(t)\boldsymbol{n}.$$

根据伏雷内公式,有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s\mathrm{d}t}=k(s)\boldsymbol{n}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

比较上面两式,得

$$\theta'(t)=k(s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=k(s)\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}=k(s)\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|.$$

定义 设(C)是平面上逐段正规的闭曲线,我们定义它的旋

转数 n_C 为

$$n_C = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1}[\theta(a_{j+1}) - \theta(a_j)] + \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j,$$

其中 α_j 是曲线(C)在角点 $\boldsymbol{r}(a_j)$ 处的外角,即为从切方向 $\dot{\boldsymbol{r}}(a_j-)$ 到切方向 $\dot{\boldsymbol{r}}(a_j+)$ 的方向角,我们还要求 $-\pi<\alpha_j<\pi$(如图 4-2).

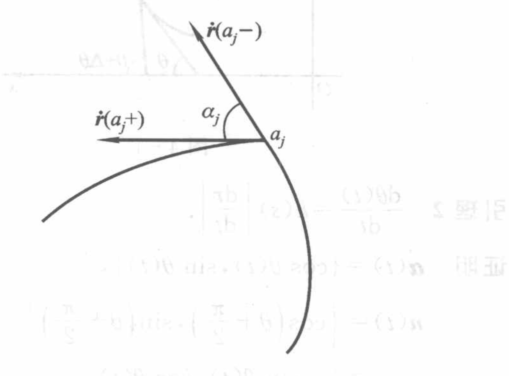


图 4-2

从上面的定义,我们可以得到引理 2 的一个推论

$$\theta(a_{j+1}) - \theta(a_j) = \theta\Big|_{a_j}^{a_{j+1}} = \int_{a_j}^{a_{j+1}} \mathrm{d}\theta(t) = \int_{a_j}^{a_{j+1}} k(s)\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t.$$

从旋转数的定义与以上推论,我们得到旋转数的计算公式:

$$n_C = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}} k(s(t))\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j.$$

例 3 如果曲线(C)是整体正规的闭曲线,则它没有角点,于是

$$n_C = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1}[\theta(a_{j+1}) - \theta(a_j)] = \frac{1}{2\pi}[\theta(b) - \theta(a)].$$

图 4-3 中分别是旋转数为 1，-1，0 和 2 的正规闭曲线.

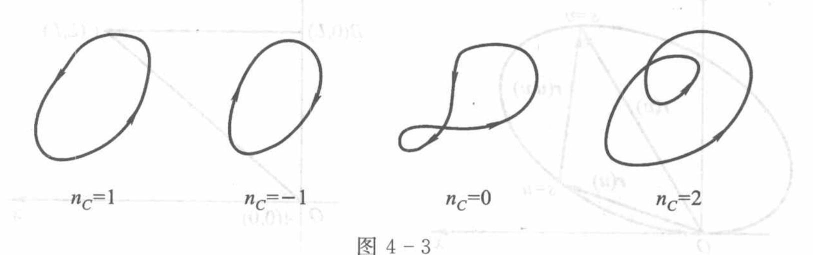


图 4-3

例 4 设(C)是平面上的直线三角形，沿它的每一条边 θ 等于常数，所以旋转数为

$$n_C = \frac{1}{2\pi}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 1.$$

例 5 设(C)是沿单位圆逆时针绕行 m 次得到的曲线

$$\boldsymbol{r} = \{\cos 2\pi t, \sin 2\pi t\},\ 0 \leqslant t \leqslant m,$$

其旋转数 $n_C = m$.

定理（旋转数定理） 设(C)：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$是平面上逐段正规的、简单的闭曲线，则旋转数 $n_C = \pm 1$.

证明 1. 我们先讨论曲线是整体正规的情形，移动曲线使曲线的始点 $\boldsymbol{r}(0)$位于坐标系原点，切向量重合于 x 轴，整个曲线(C)在 x 轴上方，并且我们对曲线取自然参数（如图 4-4）.

设 L 是曲线(C)的周长，如果 $0 \leqslant u < v \leqslant L$，我们定义二元向量函数

$$\boldsymbol{a}(u,v) = \frac{\boldsymbol{r}(v) - \boldsymbol{r}(u)}{|\boldsymbol{r}(v) - \boldsymbol{r}(u)|};$$

它的定义域是图 4-5 的三角形. 事实上，$\boldsymbol{a}(u,v)$是从 $\boldsymbol{r}(u)$指向 $\boldsymbol{r}(v)$的单位向量. 命 $v \to u$，则有 $\boldsymbol{a}(u,u) = \boldsymbol{\alpha}(u)$，这是 $\boldsymbol{r}(u)$点的单位切向量. 我们还可以得到 $\boldsymbol{a}(0,L) = -\boldsymbol{\alpha}(0) = -\boldsymbol{\alpha}(L)$.

设 $\boldsymbol{a}(u,v) = \{\cos\varphi(u,v), \sin\varphi(u,v)\}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}(u) = \{\cos\theta(u), \sin\theta(u)\}$，于是得 $\theta(u) = \varphi(u,u)$，因此

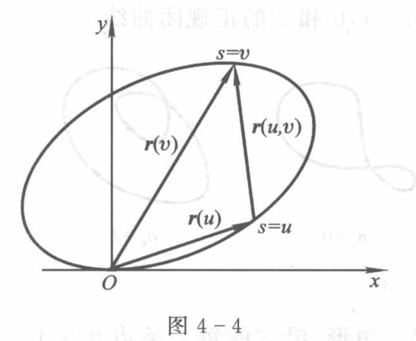


图 4－4

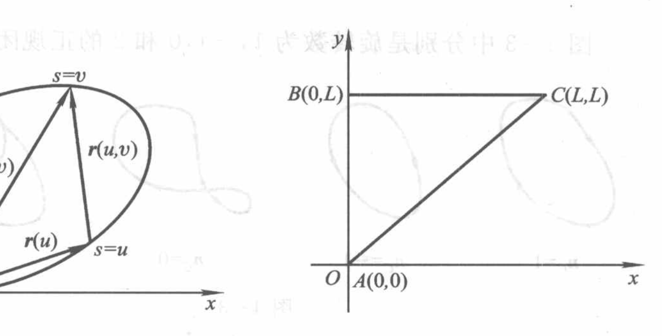


图 4－5

$$2\pi n_C \stackrel{i}{=} \int_0^L k(s)\mathrm{d}s = \int_0^L \mathrm{d}\theta = \int_{AC} \mathrm{d}\varphi.$$

由于 $\mathrm{d}\varphi$ 是全微分，所以积分 $\int_{AC} \mathrm{d}\varphi$ 与路径无关，因此我们得到

$$\int_{AC} \mathrm{d}\varphi(u,u) = \int_{AB} \mathrm{d}\varphi(u,v) + \int_{BC} \mathrm{d}\varphi(u,v)$$
$$= \int_0^L \mathrm{d}\varphi(0,v) + \int_0^L \mathrm{d}\varphi(u,L).$$

上式中 $\int_{AB} \mathrm{d}\varphi$ 表示 $\int_0^L \mathrm{d}\varphi(0,v)$，也就是当 P 点沿曲线(C)向 s 增加的方向运动时，向径 $\overrightarrow{OP}$ 所转过的角度，即 $\varphi(0,v)$ 表示 $\boldsymbol{a}(0,v) = \overrightarrow{OP}$ 与 x 轴正方向的夹角. 因为曲线(C)处于上半平面，$\overrightarrow{OP}$ 的方向总是指向上方，总旋转角应是 $\pm\pi$，其中正负号视 P 点沿曲线的绕行方向而定，逆时针时为正，顺时针时为负. 类似地，$\int_{BC} \mathrm{d}\varphi = \int_0^L \mathrm{d}\varphi(u,L)$ 表示向径 $\overrightarrow{PO}$ 所旋转过的角度，由于 $\overrightarrow{PO}$ 总指向下方，所以总旋转角也是 $\pm\pi$. 由以上的分析可以得到

$$2\pi n_C = (\pm\pi) + (\pm\pi) = \pm 2\pi,$$

即

$$n_C = \pm 1.$$

2. 以下讨论曲线(C)为逐段正规的情形. 我们将问题转化为整体正规来处理:对于逐段正规的曲线,在每一个角点 $\boldsymbol{r}(a_j)$附近作一圆,切于这个角点前后两段曲线,用切点间的圆弧代替原曲线的切点间的曲线段. 于是得到一条新的闭曲线,然后使圆弧的半径 $r_j \to 0$,则新曲线趋于原曲线. 但是新曲线是光滑的,正规的,这时定理成立.

趋于原曲线时,新曲线的切点间的 θ 的变化转化成为原曲线角点 $\boldsymbol{r}(a_j)$处的外角 α_j,即

$$n_C = \lim_{r_j \to 0} n_{\bar{C}} = \lim_{r_j \to 0}\Big[\sum_j (n_{C_j'} + n_{\bar{C}_j})\Big],$$

其中 C_j' 表示角点处的圆弧. 在 $r_j \to 0$ 时,有

$$\lim_{r_j \to 0} n_{\bar{C}_j} = \frac{1}{2\pi}(\bar{\theta}_{j+1} - \bar{\theta}_j),$$

$$\lim_{r_j \to 0} n_{C_j'} = \frac{1}{2\pi}\alpha_j.$$

所以

$$n_C = \lim_{r_j \to 0} n_{\bar{C}} = \frac{1}{2\pi}\Big[\sum_j \int_{a_j}^{a_{j+1}} k(s)\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\Big] = \pm 1.$$

推论 设曲线(C)是平面上整体正规的闭曲线,则切映射$(C) \to (S)$是在上的.

证明 根据 $n_C = +1$ 或 -1,曲线的单位切向量 $\boldsymbol{\alpha}(s)$平移到原点后,它的终点正好按逆时针(或顺时针)绕单位圆(S)一周,即

$$\theta\Big|_0^L = \int_0^L \mathrm{d}\theta = \int_0^L k(s)\,\mathrm{d}s = 2\pi n_C = \pm 2\pi,$$

所以切映射是在上的.

1.2 凸曲线

定义 一条正规的闭平面曲线称为**凸的**,如果它位于它的每一条切线的同一侧.

引理 1 平面上一条直线的两侧如果都有简单闭曲线的点,

那么它们至少有两个公共点.

证明 设给出的曲线(C)的方程为

$$(C):\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)=\{x(s),y(s)\},$$

直线l的方程为

$$y=kx+b.$$

再设曲线(C)上两点s_1与s_2分别在直线l的两侧(如图 4-6),因此它们把简单闭曲线(C)分成两部分,$[s_1,s_2]$和$[s_2,s_1+L]$且$(s_1,s_2)\cap(s_2,s_1+L)=\varnothing$.



图 4-6

曲线(C)与直线l的交点应满足$y(s)=kx(s)+b$,令

$$F(s)\equiv y(s)-kx(s)-b=0.$$

由于s_1,s_2两点在直线l的异侧,它们对直线l的离差正负号相反,命

$$F(s_1)<0,\ F(s_2)>0.$$

由函数的连续性,必有$s_0\in(s_1,s_2)$使$F(s_0)=0$. 又根据闭曲线的定义有

$$\boldsymbol{r}(s+L)=\boldsymbol{r}(s),$$

所以

$$F(s+L)=F(s),$$

因此有

$$F(s_1+L)=F(s_1)<0.$$

又因为

$$F(s_2)>0,$$

所以存在$s_0'\in(s_2,s_1+L)$使得$F(s_0')=0$. 并且由于$(s_1,s_2)\cap(s_2,s_1+L)=\varnothing$,因此得知$s_0\neq s_0'$.

引理 2 平面上给出一条正规的闭曲线与一条直线,则此闭曲线上到直线的距离最远的点处的切线必平行于该直线.

证明 设曲线(C)与直线l(如图 4-7),在l上取一点O为原

点，以 l 的某一方向为 x 轴正方向，建立坐标系(如图 4－8)，曲线 (C) 可用向量表示为

$$(C): \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x)=\{x, f(x)\},$$

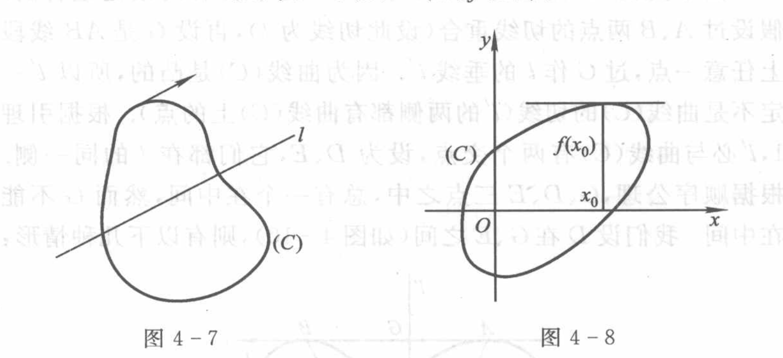


图 4－7　　　　图 4－8

其中 $f(x)$ 是曲线 (C) 上的点到直线 l 的有向距离. 由于曲线 (C) 是正规闭曲线，所以 $f(x)$ 连续可微. 设在 x_0 点 $f(x)$ 取局部极大值，则 $f'(x_0)=0$，曲线 (C) 在该点的切向量为

$$\boldsymbol{r}'=\{1, f'(x_0)\}=\{1,0\}.$$

所以在此点曲线 (C) 的切线平行于直线 l.

引理 3　设平面上简单的、正规的、闭凸曲线 $(C): \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，其中 s 是自然参数. 如果存在一对参数 $s_1, s_2, 0 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant L$，使得在 s_1、s_2 两点处曲线的切向量与 x 轴正向的夹角相等[即 $\theta(s_1)=\theta(s_2)$]，则曲线 (C) 在 $[s_1, s_2]$ 部分是直线段(如图 4－9).

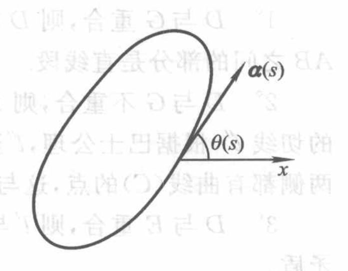


图 4－9

证明　因为 $\theta(s_1)=\theta(s_2)$，所以 $\boldsymbol{\alpha}(s_1)=\boldsymbol{\alpha}(s_2)$. 由于曲线 (C) 是正规闭曲线，根据旋转数定理的推论可知，切映射是在上的，所以存在一点 s_0，使得

$$\boldsymbol{\alpha}(s_0)=-\boldsymbol{\alpha}(s_1)=-\boldsymbol{\alpha}(s_2).$$

因此，曲线(C)上的点$\boldsymbol{r}(s_1)$，$\boldsymbol{r}(s_2)$，$\boldsymbol{r}(s_0)$处的切线互相平行，即$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_0$.

由于曲线(C)是凸的，所以l_1,l_2,l_0之中必有两条是重合的. 假设过A、B两点的切线重合(设此切线为l)，再设G是AB线段上任意一点，过G作l的垂线l'. 因为曲线(C)是凸的，所以l'一定不是曲线(C)的切线(l'的两侧都有曲线(C)上的点). 根据引理1，l'必与曲线(C)有两个交点，设为D、E，它们都在l的同一侧. 根据顺序公理，G、D、E三点之中，总有一个在中间，然而G不能在中间. 我们设D在G、E之间(如图4-10)，则有以下几种情形：

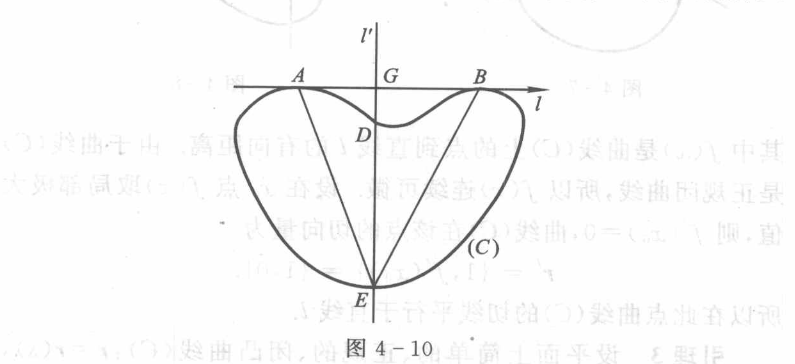


图4-10

1° D与G重合，则D在l上，因此可以得知曲线(C)在介于AB之间的部分是直线段.

2° D与G不重合，则D在$\triangle ABE$的内部. 过D作曲线(C)的切线l''，根据巴士公理，l''至少与AE、BE之一相交. 这时，l''的两侧都有曲线(C)的点，这与曲线(C)是凸的矛盾.

3° D与E重合，则l'与曲线(C)只有一个交点，这与引理1矛盾.

由以上分析得到，曲线(C)上AB间的部分是直线段.

又A、B两点是曲线(C)上直线段上的点，在这两点处不能有相反的切方向，否则切向量不连续，所以A、B只能是$\boldsymbol{r}(s_0)$，$\boldsymbol{r}(s_1)$，$\boldsymbol{r}(s_2)$中$\boldsymbol{r}(s_1)$与$\boldsymbol{r}(s_2)$两点，即曲线在$[s_1,s_2]$部分是直线.

推论 平面上简单的、正规的、闭凸曲线的旋转角 $\theta(s)$ 是单调的.

证明 如果 $\theta(s)$ 不单调，则存在一对参数 s_1 和 s_2，及另一参数 s_0，$s_1 < s_0 < s_2$，使得 $\theta(s_1) = \theta(s_2) \neq \theta(s_0)$ 这与引理 3 矛盾（如图4－11）.

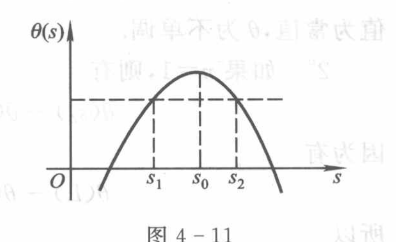


图 4－11

定理（凸曲线的判定定理）平面上简单的、正规闭曲线是凸的充分必要条件是曲率函数 $k(s)$ 不变号.

证明 必要性 设曲线（C）是凸的，则 $\theta(s)$ 是单调的，所以 $k(s) = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$ 不变号.

充分性 因为 $k(s)$ 不变号，所以 $\theta(s)$ 是单调的. 我们假设曲线（C）不是凸的，则存在曲线（C）上一点 A，在 A 点的切线 l 的两侧都有曲线（C）上的点. 由于曲线是闭的，所以在 l 的两侧分别存在与 l 距离最远的点，设为 B、D. 过 B、D 作曲线（C）的切线 l_1、l_2. 根据引理 2 得知 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l$. 既然曲线（C）在 A、B、D 三点处的切线互相平行，那么其中必有两点，在此两点的切方向相同（如图 4－12）. 设这两点对应的参数分别为 s_1、s_2，且 $s_1 < s_2$，所以有 $\boldsymbol{\alpha}(s_1) = \boldsymbol{\alpha}(s_2)$，并且

$$\theta(s_2) = \theta(s_1) + 2n\pi.$$

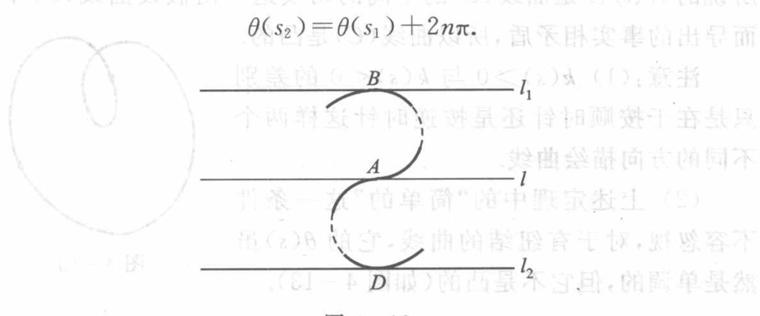


图 4－12

根据旋转数定理,n 只能取为 0、±1.

1° 如果 $n=0$,则 $\theta(s_2)=\theta(s_1)$,$s_1<s_2$,这时 θ 在 $[s_1,s_2]$ 上的值为常值,θ 为不单调.

2° 如果 $n=1$,则有

$$\theta(s_2)-\theta(s_1)=2\pi.$$

因为有

$$\theta(L)-\theta(0)=2\pi,$$

所以

$$\begin{aligned}&\theta(L)-\theta(0)-\theta(s_2)+\theta(s_1)\\=&(\theta(L)-\theta(s_2))+(\theta(s_1)-\theta(0))=0.\end{aligned}$$

由 θ 的单调性可知

$$\theta(L)-\theta(s_2)=0,\quad \theta(s_1)-\theta(0)=0.$$

即

$$\theta(L)=\theta(s_2),\quad \theta(s_1)=\theta(0),$$

所以 $[0,s_1]$ 与 $[s_2,L]$ 是直线段.

3° 如果 $n=-1$,则把 2° 中 s_1、s_2 交换位置,可得类似的结果.

总之,无论 $n=0,\pm1$,点 $\boldsymbol{r}(s_1)$,$\boldsymbol{r}(s_2)$ 把闭曲线(C)分成两段,而且总有一段是直线. 因此,曲线(C)在点 $\boldsymbol{r}(s_1)$ 与 $\boldsymbol{r}(s_2)$ 的切线重合于这切线所在的直线. 换言之,这两点的切线重合,这就与上面所说的 l_1、l_2、l 是曲线(C)的不同的切线这一由假设曲线(C)不凸而导出的事实相矛盾,所以曲线(C)是凸的.

注意:(1) $k(s)>0$ 与 $k(s)<0$ 的差别只是在于按顺时针还是按逆时针这样两个不同的方向描绘曲线.

(2) 上述定理中的"简单的"这一条件不容忽视,对于有纽结的曲线,它的 $\theta(s)$ 虽然是单调的,但它不是凸的(如图 4-13).

图 4-13

1.3 等周不等式

我们已知下列事实:周长固定的矩形中,正方形的面积最大,周长固定的三角形中,等边三角形的面积最大. 现在,我们来看周长固定的任意简单的平面曲线的情形.

定理(等周不等式定理) 设曲线(C)为平面上周长为 L 的、简单的、正规闭曲线,A 是曲线(C)所包围的面积,则有 $L^2\geqslant 4\pi A$,其中等号当且仅当曲线(C)是一圆周时成立.

证明 由于曲线(C)是平面上具有固定的有限周长 L 的简单闭曲线,所以它必是平面上的有界图形. 因此,一定可以作出两条不与(C)相交的平行直线 e_1、e_2,使(C)夹在它们中间的带状区域中. 将 e_1,e_2 平行移到刚好与(C)相交的位置,得到(C)的两条平行切线 l_1 与 l_2,(C)夹在它们之间. 设切点分别为 $F=\boldsymbol{r}(0)$ 和 $D=\boldsymbol{r}(s_2)$. 作圆 O 与 l_1、l_2 都相切且不与曲线(C)相交,以圆 O 为原点建立坐标系 $O-xy$,使 y 轴平行于 l_1.

设曲线(C)的自然参数表示为

$$(C):\boldsymbol{r}(s)=\{x(s),y(s)\},$$

其中有 $\dot{x}^2+\dot{y}^2=1$.

再设圆 O 的参数表示为

$$\boldsymbol{r}(s)=\{x(s),w(s)\}.$$

曲线(C)是简单曲线,因此在图 4-14 中 l_1 与 l_2,l_3 与 l_4 均不重合(l_1,l_2,l_3,l_4 为(C)的外切矩形所在的四条直线),因而 $\dot{x}$ 与 $\dot{y}$ 都不能在整个区间$[0,L]$上恒等于零,所以曲线(C)所包围的面积为

$$A=\int_{(C)}x\mathrm{d}y=\int_0^L x\dot{y}\mathrm{d}s.$$

圆 O 所包围的面积为

$$\pi R^2=-\int_{(C')}y\mathrm{d}x=-\int_0^L w\dot{x}\mathrm{d}s,$$

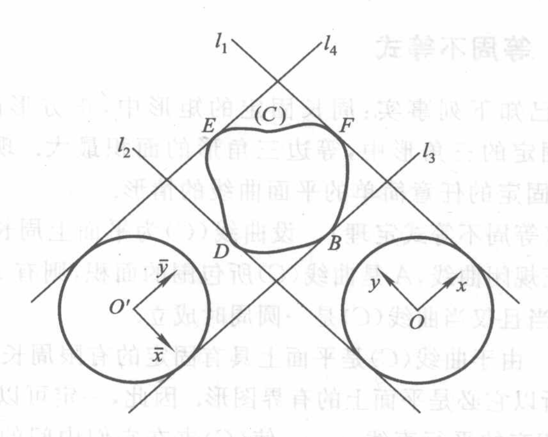


图 4-14

其中 C' 为圆 O 的圆周，因而

$$A+\pi R^2=\int_0^L (x\dot{y}-w\dot{x})\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\int_0^L |x\dot{y}-w\dot{x}|\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^L |\langle(\dot{x},\dot{y}),(-w,x)\rangle|\mathrm{d}s.$$

又因为有

$$|\langle(\dot{x},\dot{y}),(-w,x)\rangle|\leqslant|(\dot{x},\dot{y})||(-w,x)|$$

$$=\sqrt{w^2+x^2}=R,$$

所以

$$A+\pi R^2\leqslant\int_0^L R\mathrm{d}s=RL.$$

应用不等式

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2},$$

令 $a=A,b=\pi R^2$，则有

$$\sqrt{A\pi R^2}\leqslant\frac{A+\pi R^2}{2}\leqslant\frac{RL}{2},$$

因而得到

$$L^2 \geqslant 4\pi A.$$

如果要使 $L^2=4\pi A$ 成立，当且仅当上述推导过程中的不等号均取等号，即

$$(x\dot{y}-w\dot{x})=|x\dot{y}-w\dot{x}|,$$

$$|\langle(\dot{x},\dot{y}),(-w,x)\rangle|=|(\dot{x},\dot{y})||(-w,x)|=R.$$

这说明向量$(\dot{x},\dot{y})$与$(-w,x)$线性相关，并且有相同的方向. 又由于$(\dot{x},\dot{y})$是单位向量，即

$$|(\dot{x},\dot{y})|=1,$$

所以有

$$(-w,x)=R(\dot{x},\dot{y}).$$

比较它们的坐标，我们得到

$$x=R\dot{y}.$$

同时，为使 $L^2=4\pi A$ 成立，还必须使 $a=A, b=\pi R^2$ 有相等的几何平均值和算术平均值，即

$$\sqrt{A\pi R^2}=\frac{A+\pi R^2}{2}=\frac{RL}{2},$$

所以有

$$A+\pi R^2=RL.$$

由于 A、L、π 都是常数，因此 R 值惟一确定，而与 l_1、l_2 的方向无关.

再作曲线(C)的垂直于 l_1 和 l_2 的平行切线 l_3 和 l_4，使曲线(C)介于 l_3 和 l_4 之间，切点分别为 B 和 E，作圆 O'与 l_3、l_4 都相切但不与曲线(C)相交，以 O'为原点建立坐标系 $O'-\bar{x}\bar{y}$，使 $\bar{y}$ 轴平行于 l_3 和 l_4. 我们同样可得 $\bar{x}=R\bar{y}^2$.

坐标系 $O-xy$ 与 $O'-\bar{x}\bar{y}$ 之间的变换关系是

$$\begin{cases} x=\bar{x}\cos\frac{\pi}{2}-\bar{y}\sin\frac{\pi}{2}+e=-\bar{y}+e, \\ y=\bar{x}\sin\frac{\pi}{2}+\bar{y}\cos\frac{\pi}{2}+d=\bar{x}+d, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\bar{x}=y-d,\\ \bar{y}=e-x,\end{cases}$$

其中 d 和 e 是适当的常数.

于是有

$$y-d=\bar{x}=R\bar{y}=-R\dot{x},$$

所以

$$x^2+(y-d)^2=(R\dot{y})^2+(-R\dot{x})^2=R^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=R^2,$$

这说明曲线(C)是在 $O-xy$ 坐标系中,以$(0,d)$为中心,以 R 为半径的圆.

推论 平面上周长一定的简单的、正规闭曲线中,圆所包围的面积最大.

1.4 四顶点定理

现在考虑一类特殊的凸曲线,它的曲率处处不为零.

定义 平面上一条简单的、正规闭曲线,如果有曲率 $k>0$,则称为**卵形线**.

卵形线一定是凸的,因为 k 不变号.

定义 在正规的平面曲线上,使曲率取相对极值的点称为**顶点**.

例 6 椭圆 $\boldsymbol{r}(t)=\{2\cos t,\sin t\}$有四个顶点,对应的参数 t 是$0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi$.

定理(四顶点定理) 一条卵形线至少有四个顶点.

证明 因为曲线(C)是闭曲线,曲率 k 一定可以取整体极大及极小值,设这两个顶点是点 A 和点 B. 设曲线(C)的自然参数表示为

$$(C):\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),\ s\in[0,L],$$

并设 $A=\boldsymbol{r}(0)$(如图 4-15).

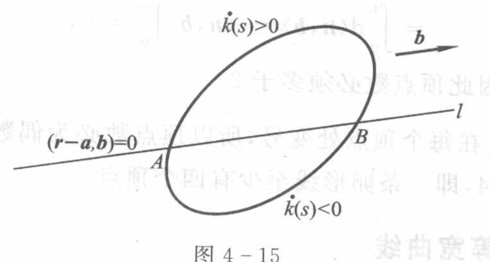


图 4－15

下面我们要证明，如果曲线(C)只有这两个顶点，就会引出矛盾.

设 l 是联结 A、B 两点的直线. 因为我们已经假定只有这两个顶点，所以 $\dot{k}$ 必在一段曲线上为正，在另一段上为负.

再设 l 的方程为

$$\langle \boldsymbol{r}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = 0,$$

于是在 l 的一侧有

$$\langle \boldsymbol{r}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle > 0;$$

在 l 的另一侧有

$$\langle \boldsymbol{r}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle < 0.$$

因此，沿曲线(C)

$$\dot{k}\langle \boldsymbol{r}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$$

不变号，于是有

$$\int_0^L \dot{k}(s)\langle \boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \mathrm{d}s \neq 0$$

但是

$$\int_0^L \dot{k}(s)\langle \boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \mathrm{d}s$$

$$= [k(s)\langle \boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle]_0^L - \int_0^L k(s)\langle \dot{\boldsymbol{r}}(s),\boldsymbol{b}\rangle \mathrm{d}s$$

$$= 0 + \int_0^L \langle -k(s)\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{b}\rangle \mathrm{d}s = \int_0^L \langle \dot{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{b}\rangle \mathrm{d}s$$

$$= \int_0^L \mathrm{d}\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b} \rangle \Big|_0^L = 0,$$

引出矛盾. 因此顶点数必须多于 2.

但是,$\dot{k}$ 在每个顶点处变号,所以顶点数必为偶数. 这说明顶点数至少为 4,即一条卵形线至少有四个顶点.

1.5 等宽曲线

设曲线(C)是一条卵形线,P 是曲线(C)上一点. 根据旋转数定理的推论,曲线(C)上存在一点 $\bar{P}$,$\bar{P}$ 处的切线与 P 点处的切向相反,即

$$\boldsymbol{\alpha}(\bar{P}) = -\boldsymbol{\alpha}(P),$$

也就是 $\bar{P}$ 和 P 处的切线平行. 又因为曲线(C)是凸的,在这两条切线之间没有其他切线平行此二切线,因此给出卵形线上一点 P,有惟一一点 $\bar{P}$ 与它对应(称为 P 的**相对点**).

定义 一条卵形线在一点 P 处的**宽度**是 P 与它的相对点 $\bar{P}$ 的切线间的距离.

定义 一条卵形线称为**等宽的**,如果它各点的宽度相等.

例 1 圆是等宽的曲线.

例 2 三角活塞发动机的活塞是逐段可微的等宽曲线.

定理(等宽曲线定理) 如果曲线(C)是等宽的卵形线,宽度为 w,则曲线(C)的长度是 πw.

证明 如图 4-16 所示,设 P 点的向量参数表示是 $P=\boldsymbol{r}(s)$,P 点的相对点 $\bar{P}$ 的向量参数表示是 $\bar{P}=\bar{\boldsymbol{r}}(s)$,其中 s 是 P 点所对应的自然参数,于是有

$$\bar{\boldsymbol{r}}(s) - \boldsymbol{r}(s) = v\boldsymbol{\alpha}(s) + w\boldsymbol{n}(s),$$

其中 $v=\langle \bar{\boldsymbol{r}}(s)-\boldsymbol{r}(s), \boldsymbol{\alpha}(s) \rangle$,$w=\langle \bar{\boldsymbol{r}}(s)-\boldsymbol{r}(s), \boldsymbol{n}(s) \rangle$.

若以 $\bar{s}$ 表示 $\bar{P}$ 点的自然参数,并注意到 $\bar{P}$ 点处的单位切向量是 $-\boldsymbol{\alpha}(s)$,单位法向量是 $-\boldsymbol{n}(s)$. 则有

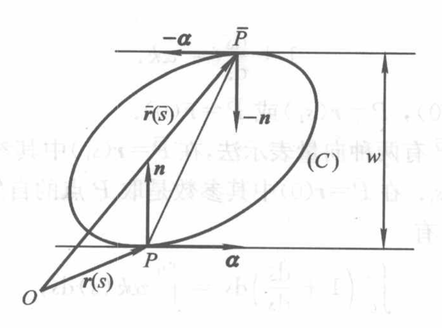


图 4－16

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{\alpha}(s) &= \frac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}\bar{s}} = \frac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\bar{s}} \\
&= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\bar{s}}\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{r}+v\boldsymbol{\alpha}+w\boldsymbol{n})}{\mathrm{d}s} \\
&= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\bar{s}}(\boldsymbol{\alpha}+\dot{v}\,\boldsymbol{\alpha}+\dot{w}\,\boldsymbol{n}+w\dot{\boldsymbol{n}}+v\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \\
&= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\bar{s}}(\boldsymbol{\alpha}+\dot{v}\,\boldsymbol{\alpha}+\dot{w}\,\boldsymbol{n}-wk\boldsymbol{\alpha}+vk\boldsymbol{n}),
\end{aligned}
$$

比较系数得

$$
\begin{cases}
-1 = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\bar{s}}(1+\dot{v}-wk), \\
0 = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\bar{s}}(vk+\dot{w}).
\end{cases}
$$

所以有

$$
\begin{cases}
1+\dot{v}-wk+\dfrac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}s}=0, \\
vk+\dot{w}=0.
\end{cases}
$$

因为曲线(C)是等宽的卵形线,因而

$$\dot{w}=0,\ k>0.$$

所以推出

$$v=0,$$

因此得到

$$1+\frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}s}=wk.$$

设 $P=\boldsymbol{r}(0)$，$\bar{P}=\boldsymbol{r}(s_1)$或 $\bar{P}=\bar{\boldsymbol{r}}(0)$.

注意,点 $\bar{P}$ 有两种向量表示法,在 $\bar{P}=\boldsymbol{r}(s_1)$中其参数值是取 $\bar{P}$ 的自然参数 $\bar{s}=s_1$. 在 $\bar{P}=\boldsymbol{r}(0)$中其参数是取 P 点的自然参数值 $s=0$.

于是我们有

$$\int_0^{s_1}\left(1+\frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s=\int_0^{s_1}wk(s)\mathrm{d}s,$$

即

$$\int_0^{s_1}\mathrm{d}s+\int_0^{s_1}\frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=\int_0^{s_1}\mathrm{d}s+\int_{s=0}^{s=s_1}\mathrm{d}\bar{s}(s)$$

$$=w\int_0^{s_1}k(s)\mathrm{d}s=w\int_0^{s_1}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=w\pi,$$

上式中 $\int_0^{s_1}\mathrm{d}s$ 是从 P 到 $\bar{P}$ 的弧长，$\int_{s=0}^{s=s_1}\mathrm{d}\bar{s}(s)=\int_{\bar{s}=s_1}^{\bar{s}=L}\mathrm{d}\bar{s}=\int_{s_1}^{L}\mathrm{d}\bar{s}$ 是从 $\bar{P}$ 到 P 的弧长. 所以曲线(C)的周长为

$$\int_0^{s_1}\mathrm{d}s+\int_{s=0}^{s=s_1}\mathrm{d}\bar{s}=w\pi.$$

1.6 平面上的 Crofton 公式

平面上的一个点集,如果它构成一条曲线,我们就用这条曲线的长度 L 作为这个点集的测度. 如果它构成平面上的一个区域,我们就用这个区域的面积 σ 作为相应点集的测度. 以下我们讨论平面上的一个直线集的测度.

设在平面直角坐标系 $O-xy$ 中,有一直线 l,它的法式方程为

$$x\cos\theta+y\sin\theta=p,$$

其中 $p\geqslant 0, 0\leqslant\theta<2\pi$. 这样,每一条直线可以用$(p,\theta)$平面上的一点表示,于是我们有以下定义:

定义 (p,θ)平面上的点集的测度为 $O-xy$ 平面上具有

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$$

的形式的方程的直线集的测度.

我们要注意的是相重的直线和对应于(p,θ)平面上的点要重复计算.

平面上的 Crofton 公式　平面上一条曲线(C),若与曲线(C)相交的直线集为U,

$$U = \{l \mid l \cap (C) \neq \varnothing\},$$

则有

$$\int_U n(l)\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}\theta = 2L,$$

其中$n(l)$是直线l与曲线(C)交点的个数(如图 4-17),$\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}\theta$是集$U$的面积元素,$L$是曲线$(C)$的长度.

证明　如图 4-18 所示,设直线l的方程为

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0,$$

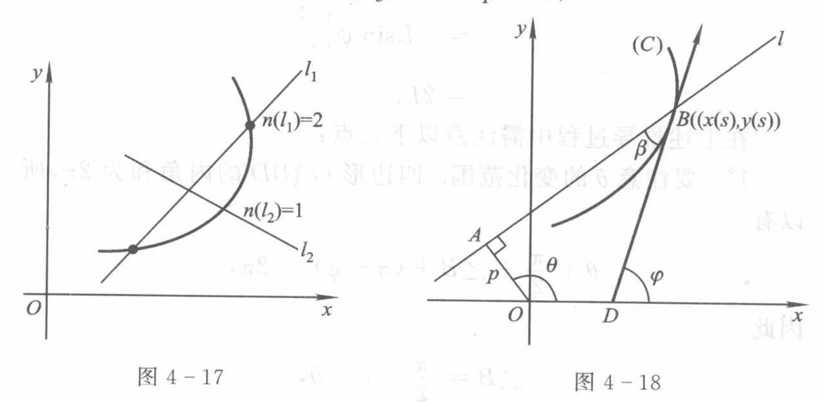


图 4-17　　图 4-18

曲线(C)的方程为

$$\boldsymbol{r} = \{x(s), y(s)\},$$

l与曲线(C)的交点处有

$$x(s)\cos\theta + y(s)\sin\theta - p = 0.$$

所以有

$$\mathrm{d}p = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\cos\theta\mathrm{d}s + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\sin\theta\mathrm{d}s - x(s)\sin\theta\mathrm{d}\theta + y(s)\cos\theta\mathrm{d}\theta,$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\cos\varphi,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\sin\varphi,$$

代入上式得

$$\mathrm{d}p=(\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta)\mathrm{d}s+(-x\sin\theta+y\cos\theta)\mathrm{d}\theta.$$

由此可以推出

$$\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}\theta=\cos(\varphi-\theta)\mathrm{d}s\wedge\mathrm{d}\theta,$$

所以有

$$\begin{aligned}\int_U n(l)\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}\theta&=\int_0^L\mathrm{d}s\int_{\varphi-\frac{\pi}{2}}^{\varphi+\frac{\pi}{2}}\cos(\varphi-\theta)\mathrm{d}\theta\\&=L\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}-\cos\psi\mathrm{d}\psi\\&=-L\sin\psi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\\&=2L.\end{aligned}$$

在上述推导过程中需注意以下几点：

1° 要注意 θ 的变化范围. 四边形 $OABD$ 的内角和为 2π，所以有

$$\theta+\frac{\pi}{2}+\angle B+(\pi-\varphi)=2\pi,$$

因此

$$\angle B=\frac{\pi}{2}+\varphi-\theta,$$

但是

$$0\leqslant\angle B\leqslant\pi,$$

所以有

$$0\leqslant\frac{\pi}{2}+\varphi-\theta\leqslant\pi,$$

即

$$\theta\geqslant\varphi-\frac{\pi}{2},\quad\theta\leqslant\varphi+\frac{\pi}{2}.$$

2° 令 $\psi=\varphi-\theta$，所以 $\theta=\varphi-\frac{\pi}{2}$ 时有 $\psi=\frac{\pi}{2}$，$\theta=\varphi+\frac{\pi}{2}$ 时有 $\psi=-\frac{\pi}{2}$.

3° 还要注意被积函数 $n(l)\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}\theta$，其中 $n(l)$ 是直线 l 与曲线 (C) 交点的个数. 经过变量替换，以 $\mathrm{d}s\wedge\mathrm{d}\theta$ 替换 $\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}\theta$ 后，由于同一直线与曲线 (C) 的不同交点有不同的 s 值，所以后面的积分已经把交点的个数计算在内.

利用平面上的 Crofton 公式，可以近似计算出可求长曲线的长度. 方法如下：

取一族平行线. 它们之间的距离为 r，然后将它们依次旋转 $\pi/4, 2\pi/4, 3\pi/4$ 共得四族平行线. 若曲线 (C) 与这些直线共有 n 个交点，则曲线 (C) 的长度（近似）为

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\int_U n(l)\,\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}\theta \\
&\approx \frac{1}{2}\sum_i n(p,\theta)\Delta p_i\Delta\theta_i \\
&\approx \frac{1}{2}nr\frac{\pi}{4}=\frac{1}{8}nr\pi.
\end{aligned}
$$

习　题

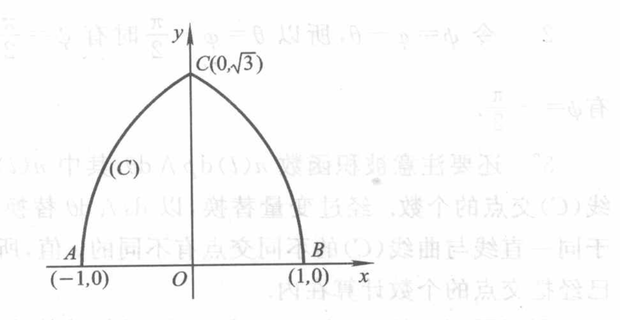
1. 设曲线 (C) 是由直线段与两条半径为 2 的圆弧构成的图形，计算它的旋转数（如第 1 题图）.

2. 设曲线 (C) 是一条闭的凸曲线，如果一条直线 l 与曲线 (C) 交于三点，则联结这些点的线段整个属于曲线 (C)，因此当曲线 (C) 的曲率 $k\neq 0$ 时，一条直线最多交曲线 (C) 于两点.

3. 如果曲线 (C) 是卵形线，求证 $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}$ 至少在四点处平行于 $\boldsymbol{\alpha}$.

4. 证明略去“闭”的条件，四顶点定理将不成立. 用抛物线 $\boldsymbol{r}(t)=\{t,t^2\}$ 作反例.

5. 设曲线 (C) 是等宽的卵形线，求证相对点的曲率半径之和是常量.



（第 1 题图）

6. 计算 1.4 中的例：椭圆 $\boldsymbol{r}=\{2\cos t,\sin t\}$ 的顶点.

7. 设曲线(C)为闭凸曲线，曲线(C)所包围的面积为 A，用 σ 表示在直线 l 上的弦长，证明：

$$\int_{l\cap(C)\neq\varnothing}\sigma\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}\theta=\pi A.$$

§2 空间曲线的整体性质

2.1 Fenchel 定理

在三维欧氏空间中，考虑简单的、正规闭曲线(C)，并设曲线(C)是定向的.

对于空间曲线(C)上每一点的单位切向量，若把其始点移到坐标原点，则过这些单位切向量的终点可在单位球面上画出一条闭曲线(Γ)，这样就确定了从曲线(C)到单位球面(S)上的一个映射，称为曲线(C)的**切映射**，曲线(Γ)称为曲线(C)的**切映射像**.

设 $\boldsymbol{r}(s)$ 是曲线(C)上一点 P 的向径，$\boldsymbol{\alpha}(s)$ 是曲线(C)在 P 点的单位切向量，则 P 点在切映射下的像 P^* 的向径为 $\boldsymbol{\alpha}(s)$（如图 4－19）.

定义 一条取自然参数的空间闭曲线(C)

$$(C):\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),\ s\in[0,L]$$

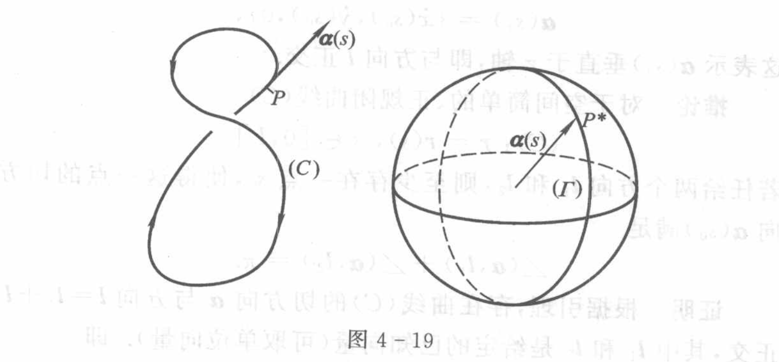


图 4-19

的全曲率是 $\int_0^L k(s)\mathrm{d}s$，其中 $k(s)$ 表示曲线 (C) 的曲率.

因为空间曲线的曲率 $k(s)=|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|=\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}\right|$，所以

$$\int_0^L k(s)\mathrm{d}s=\int_0^L|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|\mathrm{d}s=(\Gamma)\text{ 的长度}.$$

这就是说曲线 (C) 的全曲率等于切映射的像曲线 (Γ) 的长度.

引理 对于空间简单的、正规闭曲线，至少存在一条切线与给定的方向 $\boldsymbol{l}$ 正交.

证明 取 $\boldsymbol{l}$ 为坐标系的 z 轴方向. 设曲线 (C) 的自然参数表示是

$$(C):\boldsymbol{r}(s)=\{x(s),y(s),z(s)\},\ s\in[0,L].$$

因而单位切向量为

$$\boldsymbol{\alpha}(s)=\{\dot{x}(s),\dot{y}(s),\dot{z}(s)\}.$$

根据微分中值定理，存在 $s_0\in[0,L]$，使得

$$z(L)-z(0)=(L-0)\dot{z}(s_0),$$

但是

$$z(L)=z(0),$$

所以

$$\dot{z}(s_0)=0,$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}(s_0) = \{\dot{x}(s_0), \dot{y}(s_0), 0\},$$

这表示 $\boldsymbol{\alpha}(s_0)$垂直于 z 轴,即与方向 $\boldsymbol{l}$ 正交.

推论 对于空间简单的、正规闭曲线(C)

$$(C): \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s),\ s \in [0, L],$$

若任给两个方向 $\boldsymbol{l}_1$ 和 $\boldsymbol{l}_2$,则至少存在一点 s_0,使得这一点的切方向 $\boldsymbol{\alpha}(s_0)$满足

$$\angle(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{l}_1) + \angle(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{l}_2) = \pi.$$

证明 根据引理,存在曲线(C)的切方向 $\boldsymbol{\alpha}$ 与方向 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{l}_1+\boldsymbol{l}_2$ 正交,其中 $\boldsymbol{l}_1$ 和 $\boldsymbol{l}_2$ 是给定的已知向量(可取单位向量). 即

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2) = 0,$$

所以

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{l}_2 = 0,$$

因而

$$\cos(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{l}_1) + \cos(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{l}_2) = 0,$$

于是有

$$2\cos\frac{\angle(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{l}_1) + \angle(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{l}_2)}{2}\cos\frac{\angle(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{l}_1) - \angle(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{l}_2)}{2} = 0.$$

因为任意两个方向的夹角总取小于或等于 π,当$\angle(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{l}_1)$与$\angle(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{l}_2)$均小于 π 时,有

$$-\pi < \angle(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{l}_1) - \angle(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{l}_2) < \pi,$$

即

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\angle(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{l}_1) - \angle(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{l}_2)}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

所以

$$\cos\frac{\angle(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{l}_1) - \angle(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{l}_2)}{2} \neq 0,$$

因而由

$$\cos\frac{\angle(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{l}_1) + \angle(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{l}_2)}{2} = 0$$

得到

$$\angle(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{l}_1)+\angle(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{l}_2)=\pi.$$

当$\angle(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{l}_1)$与$\angle(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{l}_2)$中有一个等于$\pi$时，比如

$$\angle(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{l}_1)=\pi$$

时有

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{l}_1=-1.$$

由于

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{l}_1+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{l}_2=0,$$

于是有

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{l}_2=1.$$

可见所给定的两个方向$\boldsymbol{l}_1$与$\boldsymbol{l}_2$方向相反. 由引理可知，至少存在一条切线与给定切线l_1正交，这时它必定与l_2也正交，因此有

$$\angle(\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{l}_1)+\angle(\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{l}_2)=\pi.$$

然而，$\angle(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{l}_1)=\angle(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{l}_2)=\pi$的情形是不会出现的，因为如果$\angle(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{l}_1)=\angle(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{l}_2)=\pi$，则$\boldsymbol{l}_1$与$\boldsymbol{l}_2$方向相同，这与$\boldsymbol{\alpha}$应满足的条件

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{l}_1+\boldsymbol{l}_2)=0$$

矛盾.

定理(Fenchel 定理)　对于一条空间简单的、正规闭曲线(*C*)

$$(C):\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),\ s\in[0,L],$$

它的全曲率

$$\int_0^L k(s)\mathrm{d}s\geqslant 2\pi,$$

其中等号当且仅当曲线(*C*)是平面简单的、正规的凸闭曲线时成立.

证明　如图 4-20 所示，设曲线(*C*)上$A=\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{r}(L)$，$A$点处的切向量为$\boldsymbol{\alpha}(0)$.

由于曲线(*C*)是闭的，所以一定存在一点$B=\boldsymbol{r}(s_1)$，使得

$$\int_0^{s_1}k(s)\mathrm{d}s=\int_{s_1}^L k(s)\mathrm{d}s. \tag{4.1}$$

设B点的切向量为$\boldsymbol{\alpha}(s_1)$，根据引理的推论，在曲线(*C*)上存

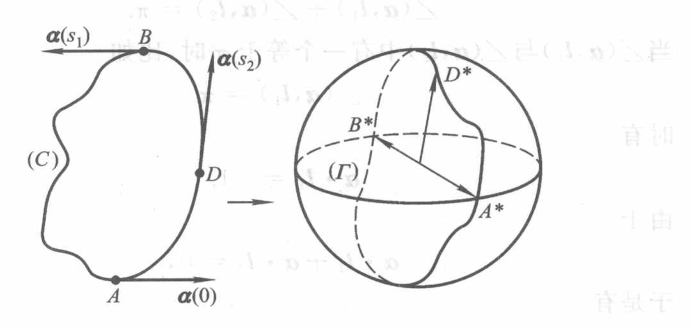


图 4-20

在一点 $D=\boldsymbol{r}(s_2)$，使得 D 点处的切方向 $\boldsymbol{\alpha}(s_2)$ 满足

$$\angle(\boldsymbol{\alpha}(s_2),\ \boldsymbol{\alpha}(0)) + \angle(\boldsymbol{\alpha}(s_2),\ \boldsymbol{\alpha}(s_1)) = \pi. \tag{4.2}$$

如果 $0 \leqslant s_2 < s_1$，首先考虑曲线 (C) 上 $\widehat{ADB}$ 的切映射像的长度

$$\int_0^{s_1} k(s)\mathrm{d}s = \int_0^{s_2} k(s)\mathrm{d}s + \int_{s_2}^{s_1} k(s)\mathrm{d}s. \tag{4.3}$$

由于球面上的大圆弧是局部短程线，因而

$$\begin{aligned}\int_0^{s_2} k(s)\mathrm{d}s &= \widehat{A^* D^*} \text{ 的长度} \\ &\geqslant \text{过 } A^*\text{、}D^* \text{ 的大圆弧的长度} \\ &= \angle A^* O D^* \\ &= \angle(\boldsymbol{\alpha}(s_2), \boldsymbol{\alpha}(0)).\end{aligned}$$

同理，

$$\int_{s_2}^{s_1} k(s)\mathrm{d}s \geqslant \angle(\boldsymbol{\alpha}(s_2), \boldsymbol{\alpha}(s_1)),$$

代入(4.3)，并利用(4.2)，有

$$\int_0^{s_1} k(s)\mathrm{d}s \geqslant \angle(\boldsymbol{\alpha}(s_2), \boldsymbol{\alpha}(0)) + \angle(\boldsymbol{\alpha}(s_2), \boldsymbol{\alpha}(s_1)) = \pi. \tag{4.4}$$

由(4.1)及(4.4)可得

$$\int_0^{L} k(s)\mathrm{d}s = \int_0^{s_1} k(s)\mathrm{d}s + \int_{s_1}^{L} k(s)\mathrm{d}s$$

$$= 2\int_0^{s_1} k(s)\mathrm{d}s \geqslant 2\pi. \tag{4.5}$$

如果 $s_1 \leqslant s_2 < L$,同样可得(注意 $\boldsymbol{\alpha}(0)=\boldsymbol{\alpha}(L)$)

$$\begin{aligned}\int_{s_1}^L k(s)\mathrm{d}s &= \int_{s_1}^{s_2} k(s)\mathrm{d}s + \int_{s_2}^L k(s)\mathrm{d}s \\ &\geqslant \angle(\boldsymbol{\alpha}(s_2),\boldsymbol{\alpha}(s_1)) + \angle(\boldsymbol{\alpha}(s_2),\boldsymbol{\alpha}(0)) \\ &= \pi,\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}\int_0^L k(s)\mathrm{d}s &= \int_0^{s_1} k(s)\mathrm{d}s + \int_{s_1}^L k(s)\mathrm{d}s \\ &= 2\int_{s_1}^L k(s)\mathrm{d}s \geqslant 2\pi. \end{aligned}\tag{4.6}$$

由(4.5)、(4.6)的结果可以看出,总有

$$\int_0^L k(s)\mathrm{d}s \geqslant 2\pi.$$

如果

$$\int_0^L k(s)\mathrm{d}s = 2\pi,$$

则当且仅当曲线(C)的切线像是两段大圆弧时才成立,这时曲线(C)必是由两段平面曲线组成的闭曲线. 但由已知条件,曲线(C)处处都只有一条切线,所以曲线(C)一定是平面闭曲线.

由平面上简单的、正规闭曲线的性质,经适当选择曲线的定向有

$$n_C = \frac{1}{2\pi}\int_0^L k(s)\mathrm{d}s = 1,$$

其中 $k(s)$是平面曲线的相对曲率. 我们把它看成空间曲线时,就有

$$\int_0^L |k(s)|\mathrm{d}s = 2\pi,$$

所以

$$\int_0^L (|k(s)| - k(s))\mathrm{d}s = \int_0^L |k(s)|\mathrm{d}s - \int_0^L k(s)\mathrm{d}s$$

$$= 2\pi - 2\pi = 0. \tag{4.7}$$

然而被积函数$|k(s)| - k(s)$是连续并且是非负的，所以当且仅当

$$|k(s)| = k(s)$$

时(4.7)成立，即

$$k(s) \geqslant 0,$$

所以曲线(C)是平面凸曲线.

另外，对于逐段正规的闭曲线，我们考虑

$$\int_0^L k(s)\,\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^n \theta_i,$$

其中 θ_i 表示在各顶点的外角.

可以证明，对于一条逐段正规的闭曲线，也有

$$\int_0^L k(s)\,\mathrm{d}s + \sum_i \theta_i \geqslant 2\pi.$$

(参阅白正国，关于空间曲线多边形的全曲率，数学学报，6(1956)，7(1957).)

例　给出的曲线(C)为椭圆

$$\boldsymbol{r}(t) = \{2\cos t, \sin t, 0\},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

设曲线(C)的自然参数为s，由曲线的对称性得到

$$\int_{(C)} k(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} k(s(t))\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} k(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t.$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\dot{\boldsymbol{r}}| = \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t},$$

$$k(s(t)) = \frac{2}{(\sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t})^3},$$

因而

$$\int_{(C)} k(s)\,\mathrm{d}s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\mathrm{d}t}{4\sin^2 t + \cos^2 t}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sec^2 t}{1 + 4\tan^2 t}\mathrm{d}t.$$

设 $u=2\tan t$，则有 $du=2\sec^2 t dt$，因此可得

$$\int_{(C)} k(s)\mathrm{d}s = 4\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = 4\arctan u\Big|_0^{\infty}$$

$$= 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

注意：曲线(C)是平面闭曲线，并且是凸的.

2.2 球面上的 Crofton 公式

如图 4－21 所示，给出 $\mathbf{R}^3$ 中的单位球面(S)，设(S)上一个定向大圆所在的平面的单位法向量为 $\boldsymbol{w}$（选取 $\boldsymbol{w}$ 的方向与大圆的定向构成右手系，始点置于球心）. 我们用 $W^{\perp}$ 表示这个定向大圆，用 W 表示 $\boldsymbol{w}$ 的终点，它是单位球面(S)上一点，称为大圆 $W^{\perp}$ 的**极点**. 因此，给出一个定向大圆，惟一地对应一个极点 W，反之任给(S)上一点 W，则惟一确定(S)上一个定向大圆 $W^{\perp}$，它以 W 为极点.

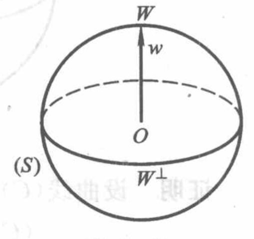


图 4－21

下面我们给出单位球面(S)上定向大圆集的测度的概念.

定义 单位球面(S)上满足某些条件的定向大圆集的**测度**，就是它们所对应的极点所构成的(S)的子集的面积.

必须注意，相重的大圆所对应的极点在计算面积时应重复计算.

设点 $W\in(S)$，它所对应的大圆为 $W^{\perp}$，曲线(C)是单位球面(S)上的一条正规曲线，用 $n_C(W)$表示曲线(C)与大圆 $W^{\perp}$ 的交点数，有时为了方便，简记为 $n(W)$，略去下标 C.

球面上的 Crofton 公式 设(C)是单位球面(S)上的长度为 L 的正规曲线，(S)上与曲线(C)相交的定向大圆集（相重的大圆重复计算）的测度是 $4L$. 即

$$U = \{W\in(S)\mid W^{\perp}\cap(C)\neq\varnothing\},$$

$$\iint_U n(W)\,\mathrm{d}A = 4L,$$

其中 $n(W)$是大圆与曲线(C)交点的个数，$\mathrm{d}A$ 是极点所构成的子集的面积元素(如图 4－22).

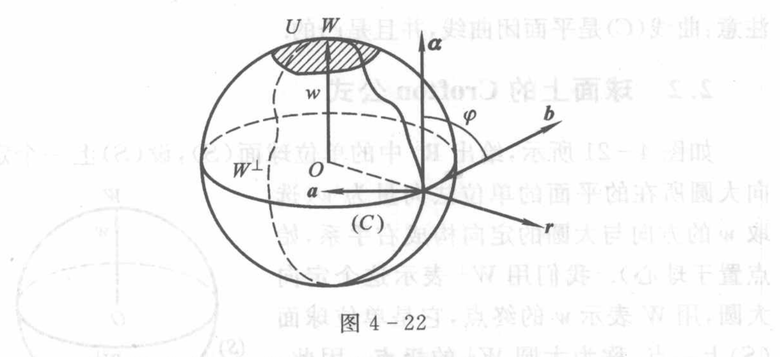


图 4－22

证明 设曲线(C)的自然参数方程为

$$(C)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s),\ s \in [0,L],$$

切向量为

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}. \tag{4.8}$$

命$\boldsymbol{a}(s)=\boldsymbol{r}(s)\times\boldsymbol{\alpha}(s)$，则$[\boldsymbol{r}(s)$、$\boldsymbol{\alpha}(s)$、$\boldsymbol{a}(s)]$构成单位正交标架. 又因为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s} \perp \boldsymbol{\alpha},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s} = \mu\boldsymbol{r} + \lambda\boldsymbol{a}. \tag{4.9}$$

但是$\boldsymbol{r}(s)\cdot\boldsymbol{\alpha}(s)=0$，因而得到

$$\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}} = 0,$$

即

$$\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -1.$$

(4.9)式点乘 $\boldsymbol{r}$，并利用上式可得

$$\mu = -1,$$

所以有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s} = -\boldsymbol{r}(s) + \lambda \boldsymbol{a}(s). \tag{4.10}$$

由 $\boldsymbol{a}(s) = \boldsymbol{r}(s) \times \boldsymbol{\alpha}(s)$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \times \boldsymbol{\alpha}(s) + \boldsymbol{r}(s) \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}$$

$$= \boldsymbol{r}(s) \times \lambda(s)\boldsymbol{a}(s) = -\lambda(s)\boldsymbol{\alpha}(s). \tag{4.11}$$

这样,(4.8),(4.10),(4.11)组成类似于伏雷内公式的分式:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\alpha}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s} = -\boldsymbol{r} + \lambda \boldsymbol{a}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}s} = -\lambda \boldsymbol{\alpha}. \end{cases}$$

设曲线(C)的切向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $W^{\perp}$ 在 $\boldsymbol{r}(s)$ 点的切向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 φ,则有

$$\boldsymbol{w} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\boldsymbol{\alpha} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\boldsymbol{a}$$

$$= (\sin\varphi)\boldsymbol{\alpha} + (\cos\varphi)\boldsymbol{a}.$$

向量 $\boldsymbol{w}$ 定义了映射$[0,L]\times[0,2\pi]\to(S)$如下:

$$\boldsymbol{w}(s,\varphi) = \sin\varphi\boldsymbol{\alpha}(s) + \cos\varphi\boldsymbol{a}(s).$$

映射 $\boldsymbol{w}$ 的像集是 U,所以

$$\iint_U n(W)\mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^L \left|\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \varphi}\right| \mathrm{d}s\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^L |\sin\varphi| \mathrm{d}s\mathrm{d}\varphi$$

$$= L\int_0^{2\pi} |\sin\varphi| \mathrm{d}\varphi$$

$$= 4L\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = 4L.$$

球面上的 Crofton 公式对逐段正规的曲线(C)也成立. 因为定理对曲线(C)的每一正规线段成立,所以把各段加起来以后也成立.

2.3 Fary-Milnor 定理

定义 对于一条空间闭曲线(C),如果存在一个一一连续映射.

$D\to\mathbf{R}^3$(其中 D 是平面上的圆盘),使得曲线(C)正好是 D 的边界在此映射下的像,则称曲线(C)是一条**不打结的曲线**,否则称曲线(C)为**打结的曲线**(如图 4-23).

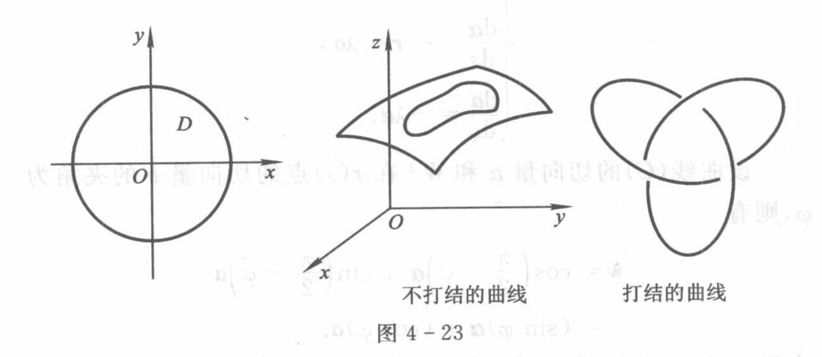


图 4-23

下面我们利用球面上的 Crofton 公式证明 Fary-Milnor 定理,它是 Fenchel 定理在打结曲线上的推广. 我们先证明下述两个引理.

引理 1 如果正规闭曲线(C)在切映射下的像(C^*)含在一个闭半球内,则(C^*)必在以此半球的边界的大圆上.

证明 若(C^*)包含在以 N 为北极的闭半球内,N 所对应的向径为 $\boldsymbol{n}$,则有

$$0\leqslant\angle(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\alpha})\leqslant\frac{\pi}{2}\quad(\text{其中 }\boldsymbol{\alpha}\text{ 为曲线}(C^*)\text{的向径}),$$

所以

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\alpha} \geqslant 0,$$

而

$$\int_0^L (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \mathrm{d}s = \boldsymbol{n} \cdot \int_0^L \dot{\boldsymbol{r}}(s) \mathrm{d}s = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}(s) \Big|_0^L = 0.$$

由于被积函数连续、非负，所以

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0,$$

即(C^*)在赤道上.

推论 1 一条正规闭曲线在切映射下的像不可能包含在一个开半球内.

推论 2 一条正规挠闭曲线在切映射下的像不可能包含在一个闭半球内.

证明 如果曲线在切映射下的像包含在一个闭半球内，则根据引理，它必包含在赤道上，因而原曲线是平面曲线，与已知条件矛盾.

引理 2 设(C)是正规挠闭曲线，其切映射的像为(C^*)，则

$$U = \{W \in (S) \mid W^{\perp} \cap (C^*) \neq \varnothing\}$$

与

$$(S) = \left\{P \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, |\overrightarrow{OP}| = 1\right\}$$

相等.

证明 先证$U \subset (S)$，这是显然的，因为

$$U = \{W \in (S) \mid W^{\perp} \cap (C^*) \neq \varnothing\}.$$

再证$(S) \subset U$. 用反证法.

设$W_0 \in (S)$，但$W_0 \overline{\in} U$，于是有

$$W_0^{\perp} \cap (C^*) = \varnothing.$$

这时曲线(C)的切映射的像(C^*)不与(S)上某一大圆相交，(C^*)必包含在一个开半球内，这与上述推论 1 矛盾，所以$(S) \subset U$.

从而得到$U = (S)$.

定理(Fary-Milnor 定理) 设曲线(C)：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$，$s \in [0, L]$是一条打结的、简单的、正规挠闭曲线，则它的全曲率

$$\int_{(C)} k(s)\mathrm{d}s \geqslant 4\pi.$$

证明 用反证法.

如果

$$\int_{(C)} k(s)\mathrm{d}s < 4\pi,$$

命(C^*)是曲线(C)在单位球面(S)上切映射的像,则根据球面上的 Crofton 分式,有

$$\frac{1}{4}\iint_U n_{C^*}(W)\mathrm{d}A = L^* = \int_{(C)} k(s)\mathrm{d}s < 4\pi.$$

因此,至少存在一个向量 w_0,使 $n_{C^*}(W_0) < 4$,否则

$$\frac{1}{4}\iint_U n_{C^*}(W)\mathrm{d}A = \frac{1}{4}\iint_{(S)} n_{C^*}(W)\mathrm{d}A$$

$$\geqslant \frac{1}{4}\cdot 4\iint_{(S)} \mathrm{d}A = \frac{1}{4}\cdot 4\cdot 4\pi = 4\pi,$$

上式中的积分区域 U,根据引理 2 就是(S).

作函数

$$f(s) = \boldsymbol{r}(s)\cdot \boldsymbol{w}_0,$$

它是 $\boldsymbol{r}(s)$在 w_0 方向上投影的长度(如图 4-24),我们把 $f(s)$称为高度函数.

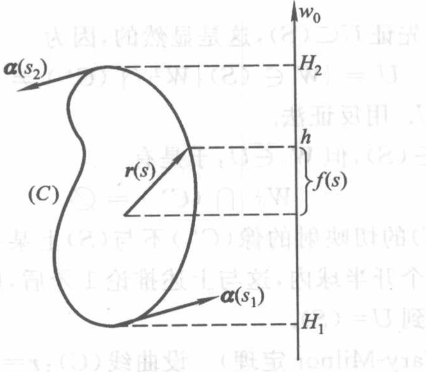


图 4-24

因为 $f'(s)=\boldsymbol{\alpha}(s)\cdot\boldsymbol{w}_0$ 所以 $f'(s)=0$ 等价于 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 与 $\boldsymbol{w}_0$ 垂直,即此点的切映射的像在以 $\boldsymbol{w}_0$ 为极点的大圆 $W_0^{\perp}$ 上. 由 $n_{C^*}(W_0)<4$ 可知,使 $f'(s)=0$ 的点至多只有三个. 如果这样的点有三个,由于 $f(s)$ 定义在闭区间 $[0,L]$ 上,有极大值和极小值,设

$$f(s)\big|_{\max}=f(s_2)=H_2,$$
$$f(s)\big|_{\min}=f(s_1)=H_1.$$

如果还有一点 s_3,使得 $f'(s_3)=0$,则它只能是 $f(s)$ 的逗留点,而不能成为极值点,否则由于两个极大点之间至少有一个极小点,两个极小点之间至少有一个极大点,因而至少有四个极值点. 这与 $n_{C^*}(W_0)<4$ 矛盾. 因此在曲线 (C) 上,高度函数的极值点只能有两个.

对介于 H_1 与 H_2 之间的每一个数 h,可作一高度为 h 的截面 $\boldsymbol{r}(s)\cdot\boldsymbol{w}_0=h$,以下我们说明这个截面只与曲线 (C) 有两个交点.

至少有两个交点是清楚的,因为从最高点按曲线的定向到最低点时,至少要与截面有一个交点,设交点为 P_1,另一方面,从最低点顺着曲线的定向到最高点时,又至少与截面交于一点,设交点为 P_2. 如果曲线 (C) 上还有一点在截面上,不妨设这点为 P,且 P 是从 P_1 到 P_2 的弧段中. 由于

$$f(P_1)=f(P),$$

由中值定理知道,在曲线 (C) 的开弧段 $\overset{\frown}{P_1P}$ 中,必有一个极值点(如图 4-25).

同样,由

$$f(P)=f(P_2)$$

得知,在曲线 (C) 的开弧段 $\overset{\frown}{PP_2}$ 中也必有一个极值点. 再加上最高(低)点,曲线 (C) 上就有三个极值点,这是不可能的,所以截面上只有两个曲线 (C) 上的点.

把 $\boldsymbol{w}_0$ 的每一个垂面与曲线 (C) 相交的两点联结起来后,得到一族平行弦,再取 H_1H_2 为直径作圆盘 D,以上垂直于 $\boldsymbol{w}_0$ 的平面也与圆盘 D 相交成平行弦(如图 4-26). 我们定义如下的拓扑映

射 φ:

$$\varphi: D \to (C)\text{的内部},$$

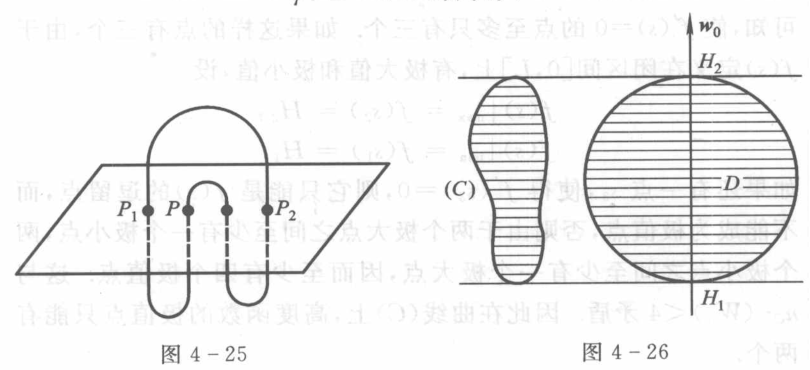


图 4－25　　　　　　图 4－26

它把圆 D 的平行弦映为曲线(C)上的平行弦，于是曲线(C)是圆 D 的边缘在 φ 下的像. 所以曲线(C)是不打结的曲线，与原假设矛盾.

2.4　闭曲线的全挠率

与全曲率类似，我们考虑一条空间闭曲线的全挠率.

定义　一条空间闭曲线(C):$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,$0\leqslant s\leqslant L$,$\tau(s)$是它的挠率，称

$$\hat{\tau}=\int_0^L \tau(s)\mathrm{d}s$$

为曲线(C)的**全挠率**.

空间闭曲线的全挠率的取值可在正负无穷之间，即全挠率没有上限和下限. 但对于球面闭曲线，其全挠率为零，为证明此结果，我们先给出下面两个引理.

引理 1　半径为 R 的球面上一条闭曲线(C)，经相似变换到单位球面(S)上，其像为(Γ)，则(C)与(Γ)有相同的全挠率(如图 4－27).

证明　设(Γ)的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，则($C$)的方程为 $\boldsymbol{r}^*=R\boldsymbol{r}(s)$.

于是有

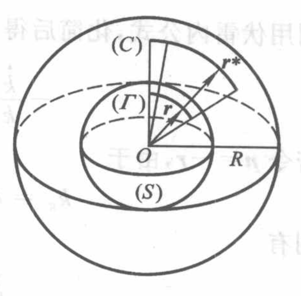


图 4-27

$$\tau_\Gamma(s)=\frac{(\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}\dddot{\boldsymbol{r}})}{(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}})^2},$$

$$\tau_C(s)=\frac{(\boldsymbol{r}^{*\prime}\boldsymbol{r}^{*\prime\prime}\boldsymbol{r}^{*\prime\prime\prime})}{(\boldsymbol{r}^{*\prime}\times\boldsymbol{r}^{*\prime\prime})^2}.$$

但是

$$\boldsymbol{r}^{*\prime}=R\dot{\boldsymbol{r}}(s),\boldsymbol{r}^{*\prime\prime}=R\ddot{\boldsymbol{r}}(s),$$

$$\boldsymbol{r}^{*\prime\prime\prime}=R\dddot{\boldsymbol{r}}(s),$$

所以

$$\tau_C(s)=\frac{1}{R}\frac{(\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}\dddot{\boldsymbol{r}})}{(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}})^2}=\frac{1}{R}\frac{(\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}\dddot{\boldsymbol{r}})}{(\ddot{\boldsymbol{r}})^2}=\frac{1}{R}\tau_\Gamma(s).$$

由于这一映射是保形映射，所以两球面上的第一基本形式成比例，比例系数为 R. 因而曲线(C)上的弧长 $s^*=Rs$，所以有

$$\hat{\tau}_C=\int_0^L\frac{1}{R}\tau_\Gamma R\,\mathrm{d}s=\int_0^L\tau_\Gamma\,\mathrm{d}s=\hat{\tau}_\Gamma.$$

引理 2 单位球面上的曲线(C)，若 $k_g\neq0$，则

$$\tau=-\frac{\dot{k}}{kk_g}=-\varepsilon\frac{\dot{k}}{k\sqrt{k^2-1}},$$

其中 $\varepsilon=\pm1$.

证明 设单位球面上的曲线(C)：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$. 由于

$$\boldsymbol{r}^2=1,$$

从而有

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\alpha}=0,$$

所以

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{r}\cdot k\boldsymbol{\beta}=0,$$

即

$$1+k\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta}=0.$$

由上式得

$$\dot{k}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta}+k\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}=0,$$

利用伏雷内公式，化简后得

$$-\frac{\dot{k}}{k}+k\tau \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\gamma}=0.$$

若令 $\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{r}$，由于

$$k_g=k\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{n}=-k\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\gamma},$$

则有

$$\frac{\dot{k}}{k}+\tau k_g=0.$$

但是单位球面上曲线的法曲率 $k_n=1$，并且由于

$$k_n^2+k_g^2=k^2,$$

所以

$$k_g=\varepsilon\sqrt{k^2-1},\qquad \varepsilon=\pm 1.$$

因此当 $k_g\neq 0$ 时，有

$$\tau=-\frac{\dot{k}}{kk_g}=-\varepsilon\frac{\dot{k}}{k\sqrt{k^2-1}}.$$

定理 球面上正规闭曲线的全挠率等于零.

证明 把所给出的球面闭曲线作空间相似变换. 变到单位球面(S)上，则得单位球面(S)上闭曲线(Γ). 由引理 1 可知，原曲线(C)与(Γ)有相同的全挠率.

1° 设在整个闭曲线(Γ)上 $k_g\neq 0$，则 k_g 恒为正或恒为负，这时(Γ)的全挠率

$$\hat{\tau}=-\varepsilon\int_0^L\frac{\dot{k}\mathrm{d}s}{k\sqrt{k^2-1}}=\varepsilon\operatorname{arccsc}k(s)\Big|_0^L=0.$$

2° 设在闭曲线(Γ)上的一些点处 $k_g=0$，这时假定在 $0\leqslant s\leqslant L$ 上有有限个这样的点. 例如 $0=s_0<s_1<\cdots<s_n=L$ 各点 $k_g=0$. 因而在开区间 (s_{i-1},s_i) 里 k_g 不变号. 若在闭区间 $[s_{i-1},s_i]$ 上 $k_g=0$，则该区间对应(Γ)上的是一段测地线，即大圆弧，因而是一段平面曲线，$\tau=0$，所以

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} \tau \mathrm{d}s = 0.$$

若在开区间(s_{i-1}, s_i)上 k_g 总大于零或总小于零，则 ε 值固定，

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} \tau \mathrm{d}s = -\varepsilon \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\dot{k} \mathrm{d}s}{k\sqrt{k^2-1}} = \varepsilon \operatorname{arccsc} k(s) \Big|_{s_{i-1}}^{s_i} = \varepsilon\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 0.$$

把各小区间上的积分相加，得(Γ)的全挠率

$$\hat{\tau} = \int_0^L \tau \mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{n} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \tau \mathrm{d}s = 0.$$

W. Scherrer 在 1940 年证明了这个定理的逆定理：若 M 是三维空间的曲面，对曲面上的任何闭曲线有 $\int \tau \mathrm{d}s = 0$，则 M 是平面片或球面片. 我们在这里就不再讨论了.



习 题

1. 命(C)：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$是空间曲线. 设 $0 \leqslant k(s) \leqslant \dfrac{1}{R}$，$R$ 是一正实数，求证曲线(C)的长度至少是 $2\pi R$.

2. 考虑第 2 题图中一条由三个半径为 2 的圆弧构成的逐段光滑的平面正规非凸曲线(C)，计算曲线(C)的全曲率.

3. 命(C)是单位球面上的曲线，它的方程是

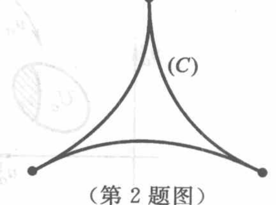
$$\boldsymbol{r} = \{\cos s, \sin s, 0\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi.$$

验证 Crofton 公式对曲线(C)的正确性.

4. 证明：对于球面上任意闭曲线有

$$\int (\tau / k) \mathrm{d}s = 0,$$

其中 τ 是曲线的挠率，k 是曲线的曲率.



（第 2 题图）

§ 3　曲面的整体性质

3.1　曲面的整体定义

定义　$\mathbf{R}^3$ 中的子集 M 称为**简单曲面**或简称为**曲面**，如果在 $\mathbf{R}^2$ 中存在一组开集 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 和相应的映射 $f_\alpha: U_\alpha \to M_\alpha \subset \mathbf{R}^3$ 使得

1°　每一个映射 $f_\alpha: U_\alpha \to M_\alpha = f(U_\alpha) \subset M$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的开集到 M 的子集 M_α 的同胚；

2°　$\{M_\alpha\}$ 构成 M 的开覆盖，即 $\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha = M$，其中 M_α 称为 M 上的**坐标域**，

$$u_\alpha = f_\alpha^{-1}: M_\alpha \to U_\alpha$$

称为 M 上的**坐标函数**，M 上的全体坐标域和坐标函数的集合 $\{(M_\alpha, u_\alpha)_{\alpha\in A}\}$ 称为 $\mathbf{R}^3$ 中曲面 M 的**图册**；

3°　若 $M_\alpha \cap M_\beta \neq \varnothing$，对于 $M_\alpha \cap M_\beta$ 中的点有两种坐标（如图 4－28）

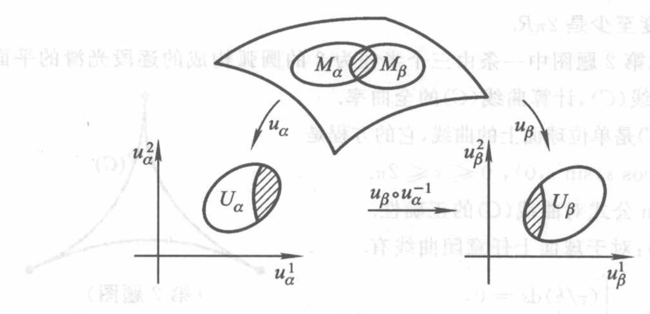


图 4－28

$$u_\alpha: M_\alpha \to U_\alpha \subset \mathbf{R}^2,$$

$$u_\beta: M_\beta \to U_\beta \subset \mathbf{R}^2,$$

则存在同胚

$$u_\beta \circ u_\alpha^{-1}: u_\alpha(M_\alpha \cap M_\beta) \to u_\beta(M_\alpha \cap M_\beta),$$

如果 $U_\alpha = u_\alpha(M_\alpha)$ 和 $U_\beta = u_\beta(M_\beta)$ 上点的坐标为 (u_α^1, u_α^2) 和 (u_β^1, u_β^2)，那么上述映射可表示为

$$u_\beta^i = u_\beta^i(u_\alpha^1, u_\alpha^2),\ i = 1, 2,$$

这是 $M_\alpha \cap M_\beta$ 上局部坐标变换公式.

定义 设 $\mathbf{R}^3$ 中曲面 M 的局部坐标变换公式中，所有函数都是 C^k 类的，则 M 称为 C^k **类曲面**. 以后我们讨论的都是 C^∞ 类曲面.

例 1 球面

考虑 $\mathbf{R}^3$ 中的球面(S)：$x^2+y^2+z^2=r^2$，取(S)的两个开集

$$S_1: \left\{(x,y,z) \in (S) \,\middle|\, z < \frac{r}{2}\right\},$$

$$S_2: \left\{(x,y,z) \in (S) \,\middle|\, z > -\frac{r}{2}\right\},$$

构成了球面的开覆盖.

用球极投影定义坐标映射如下(如图 4-29)：以北极 $N(0,0,r)$ 为投影中心，把 S_1 投影到 $\mathbf{R}^2=Oxy$ 平面，于是得到坐标映射

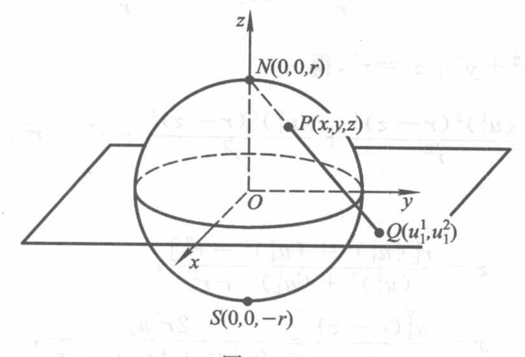


图 4-29

$$u_1: S_1 \to \mathbf{R}^2,$$

即

$$\frac{u_1^1}{x} = \frac{r}{r-z},$$

所以有

$$u_1^1 = \frac{rx}{r-z}.$$

同理

$$u_1^2 = \frac{ry}{r-z}.$$

再以南极 $S(0,0,-r)$ 为投影中心，把 S_2 投影到 $\mathbf{R}^2 = Oxy$ 平面，对应的坐标映射

$$u_2 : S_2 \to \mathbf{R}^2,$$

于是有

$$u_2^1 = \frac{rx}{r+z},\ u_2^2 = \frac{ry}{r+z}.$$

这时要考虑将 S_1、S_2 投影到 Oxy 平面上时，其像是否为 $\mathbf{R}^2$ 中的开集. 对于函数 $u_1 : S_1 \to \mathbf{R}^2$，求其逆函数，即从函数表达式中解出 x、y、z. 将

$$x = \frac{u_1^1(r-z)}{r} \text{ 及 } y = \frac{u_1^2(r-z)}{r}$$

代入方程 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$，得

$$\frac{(u_1^1)^2(r-z)^2}{r^2} + \frac{(u_1^2)^2(r-z)^2}{r^2} + z^2 = r^2,$$

于是得到

$$z = \frac{r[(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2 - r^2]}{(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2 + r^2},$$

$$x = \frac{u_1^1(r-z)}{r} = \frac{2r^2 u_1^1}{(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2 + r^2},$$

$$y = \frac{u_1^2(r-z)}{r} = \frac{2r^2 u_1^2}{(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2 + r^2}.$$

因为

$$(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2 = \frac{r^2(x^2+y^2)}{(r-z)^2} = \frac{r^2(r^2-z^2)}{(r-z)^2} = \frac{r^2(r+z)}{r-z}$$

$$< \frac{r^2\left(r+\dfrac{r}{2}\right)}{r-\dfrac{r}{2}} = 3r^2,$$

所以 $U_1 = u_1(S_1)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的开圆盘 $(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2 < 3r^2$，是开集.

同理，对于 $u_2: S_2 \to \mathbf{R}^2$ 解出 x, y, z，

$$x = \frac{2r^2 u_2^1}{(u_2^1)^2 + (u_2^2)^2 + r^2},$$

$$y = \frac{2r^2 u_2^2}{(u_2^1)^2 + (u_2^2)^2 + r^2},$$

$$z = \frac{r[r^2 - (u_2^1)^2 - (u_2^2)^2]}{(u_2^1)^2 + (u_2^2)^2 + r^2},$$

所以 $U_2 = u_2(S_2)$ 也是 $\mathbf{R}^2$ 中的开圆盘 $(u_2^1)^2 + (u_2^2)^2 < 3r^2$，也是开集，因此球面是简单曲面.

对于 $S_1 \cap S_2$ 上的点

$$\left\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2, -\frac{r}{2} < z < \frac{r}{2}\right\},$$

有同胚映射

$$u_2 \circ u_1^{-1}: U_1 \to U_2,$$

相应的局部坐标变换公式是

$$u_2^1 = \frac{r^2 u_1^1}{(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2},$$

$$u_2^2 = \frac{r^2 u_1^2}{(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2},$$

这是 C^∞ 类函数，因此球面是 C^∞ 类曲面.

例 2 二次锥面(如图 4 - 30)

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\},$$

取开集族

$$C_1^1: \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ 0 \leqslant z < \varepsilon\},$$

……

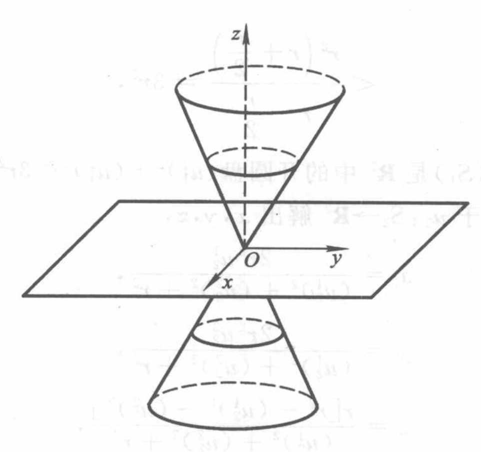


图 4－30

$C_1^n:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid x^2+y^2-z^2=0,\ 0\leqslant z<n\varepsilon\}$,

$C_2^1:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid x^2+y^2-z^2=0,\ -\varepsilon<z\leqslant 0\}$,

……

$C_2^n:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid x^2+y^2-z^2=0,\ -n\varepsilon<z\leqslant 0\}$,

……

用垂直于 Oxy 平面的投影定义坐标映射如下：

$$u_1^i:C_1^i\to\mathbf{R}^2,$$
$$x^i=x,\ y^i=y,\ z^i=0,$$
$$u_2^j:C_2^j\to\mathbf{R}^2,$$
$$x^j=x,\ y^j=y,\ z^j=0.$$

由于

$$(x^i)^2+(y^i)^2=x^2+y^2=z^2<|i\varepsilon|^2,$$

所以是开圆盘，是 $\mathbf{R}^2$ 上的开集. 这样就整体地定义了锥面.

对于函数

$$(u_1^i)^{-1}:z=\sqrt{(x^i)^2+(y^i)^2},\ x=x^i,\ y=y^i$$

在(0,0)点不可微，故函数

$$u_1^j \circ (u_1^i)^{-1}$$

在 $C_1^i \cap C_1^j$ 上不是处处可微，所以二次锥面不是光滑曲面.

3.2 曲面的一般性质

(1) 曲面的定向性

定义 曲面 M 称为(可)定向的，如果它的局部坐标经过适当排序后变换公式的雅可比行列式恒大于零，即

$$\frac{\partial(u_2^1, u_2^2)}{\partial(u_1^1, u_1^2)} > 0.$$

实例 球面是可定向的.

由球面的局部坐标变换公式

$$u_2^1 = \frac{r^2 u_1^1}{(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2},\ u_2^2 = \frac{r^2 u_1^2}{(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2},$$

可得

$$\frac{\partial(u_2^1, u_2^2)}{\partial(u_1^1, u_1^2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_2^1}{\partial u_1^1} & \dfrac{\partial u_2^1}{\partial u_1^2} \\ \dfrac{\partial u_2^2}{\partial u_1^1} & \dfrac{\partial u_2^2}{\partial u_1^2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{r^2[(u_1^2)^2 - (u_1^1)^2]}{[(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2]^2} & -\dfrac{2r^2 u_1^1 u_1^2}{[(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2]^2} \\ -\dfrac{2r^2 u_1^1 u_1^2}{[(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2]^2} & \dfrac{r^2[(u_1^1)^2 - (u_1^2)^2]}{[(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2]^2} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{r^4}{[(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2]^2} < 0.$$

改变坐标 (u_2^1, u_2^2) 的次序，则雅可比行列式恒大于零.

(2) 曲面的紧致性

定义 一个简单曲面是紧致的，如果它是 $\mathbf{R}^3$ 中的紧致子集.

根据有关紧致集的性质，容易得到紧致曲面的等价定义：

1° 曲面是紧致的，当且仅当它的任何一个图册都可以只包括有限个坐标域.

2° 曲面的任何一个开覆盖，都有有限子覆盖，则曲面是紧致的.

3° 曲面是紧致的，当且仅当它是 $\mathbf{R}^3$ 中的有界闭集.

例 3 球面是紧致曲面，因为它是有界闭集.

例 4 椭圆抛物面不是紧致曲面.

椭圆抛物面的方程为

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2z,$$

取坐标域

$$M_n=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2z, z<n\right\},$$

其中 $n=1, 2, 3, \cdots$.

坐标映射为

$$u_n: M_n \to U_n \in \mathbf{R}^2,$$

$$u_n^1=x,\ u_n^2=y.$$

在这个图册里，坐标域的个数是无限的，且不可能只取出有限个而构成曲面的图册，所以椭圆抛物面不是紧致的.

设 M 是 $\mathbf{R}^3$ 中的紧致曲面，它必在 $\mathbf{R}^3$ 中有界，令

$$\overline{B}_r=\{P\in\mathbf{R}^3 \mid |OP|\leqslant r\},$$

则存在最小的正数 r，使得 $M\subset\overline{B}_r$，于是我们有

命题 M 是 $\mathbf{R}^3$ 中的紧致曲面，r 是使得 $M\subset\overline{B}_r$ 的最小正数，那么一定存在一点 $P\in M$，使得 $|OP|=r$. 也就是说，$M\cap S_r\neq\varnothing$，其中 S_r 是半径为 r 的球面.

证明 令 $r_n=r-\dfrac{1}{n}$ $(n>0)$，根据 r 的选择，我们有

$$M-(\overline{B}_{r_n}\cap M)\neq\varnothing.$$

令

$$P_n\in M-(\overline{B}_{r_n}\cap M)\subset M,$$

则存在序列 P_n（点列仍记为 P_n），由于 M 紧致，所以 P_n 必收敛于

$P\in M$. 即 $\lim|OP_n|=r$,也就是 $|OP|=r$.

定理 M 是 $\mathbf{R}^3$ 中的紧致曲面,则一定存在一点 P,使得 P 点的高斯曲率 $K(P)>0$.

证明 令 r 是 $M\subset\bar{B}_r$ 的最小正数,根据上面的命题 $S_r\cap M\neq\varnothing$. 再令 $P\in S_r\cap M$,经坐标的旋转变换,使 P 点转到 z 轴上(如图 4-31),则 $|OP|=r$ 是曲面的向径长度的最大值(即 M 上点到原点的最大距离),若距离函数用 d 表示,$\max d=|OP|$,即在 P 点有 $d'(P)=0$,$d''(P)<0$. 取 M 上过 P 点的曲线 σ,设

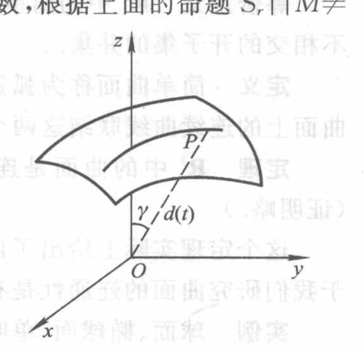


图 4-31

$$\sigma:\boldsymbol{r}=\{f(t),g(t),h(t)\},$$

其中 $h(t)=d(t)\cos\gamma(t)$(γ 是 t 所对应的点的向径与 z 轴的夹角),在 P 点有

$$\boldsymbol{r}(P)=\{f(0),g(0),h(0)\},$$

切向量为

$$\boldsymbol{r}'(P)=\{f'(0),g'(0),h'(0)\}.$$

但是

$$h'(0)=d'(0)\cos\gamma(0)-d(0)\sin\gamma(0)\cdot\gamma'(0),$$

而 $\gamma(0)=0$,所以 $h'(0)=0$. 即切向量平行于 xOy 平面. 但球面 S_r 上 P 点的切向量也平行于 xOy 平面,所以 M 与 S_r 在 P 点有相同的法向量 $\boldsymbol{n}$ 和相同的切平面. 设 $\boldsymbol{x}$ 与 M、S_r 都相切,令 π 是 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 所决定的平面,那么曲面 M 在 $\boldsymbol{x}$ 方向上的法曲率 k_n 是 $\pi\cap M$ 的曲率,它与 S_r 在 P 点的法曲率有相同的正负号,显然 $|k_n|\geqslant\frac{1}{r}$. 当 k_1,k_2 是 P 点的主曲率时,$K=k_1\cdot k_2\geqslant\frac{1}{r^2}>0$.

推论 1 在 $\mathbf{R}^3$ 中不可能存在 $K\leqslant0$ 处处成立的紧致曲面.

推论 2 在 $\mathbf{R}^3$ 中不可能存在紧致的极小曲面.

证明 $H=0$,$k_1=-k_2$,则 $K=-k_1k_2=-k_1^2<0$,这是不可能

的. $H=0, k_1=k_2=0$,则它是平面,不是紧致的.

(3) 曲面的连通性

定义 $\mathbf{R}^3$ 中的简单曲面是**连通的**,当它是 $\mathbf{R}^3$ 中的连通子集.

等价定义 $\mathbf{R}^3$ 中的简单曲面是连通的,当它不能表示为两个不相交的开子集的并集.

定义 简单曲面称为弧连通的,当对曲面上任何两点总存在曲面上的连续曲线联结这两个点.

定理 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面是连通的充要条件为曲面是弧连通的. (证明略.)

这个定理实际上给出了曲面连通性的另一种识别方法,这对于我们研究曲面的连通性是有益的.

实例 球面、椭球面、单叶双曲面、环面、锥面都是连通的. 双叶双曲面、双曲柱面不是连通曲面. 一般我们只研究连通曲面,这一点以后不另加说明.

3.3 卵形面

定义 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面 M 称为凸的,如果对于 M 上每一点 x,都有高斯曲率 $K(x)>0$.

定义 $\mathbf{R}^3$ 中的紧致的凸曲面称为**卵形面**.

实例 球面、椭球面是卵形面,单叶双曲面、双曲抛物面、环面都不是卵形面.

(1) 阿达马(Hadamard)定理

阿达马定理 设 M 是 $\mathbf{R}^3$ 中的定向紧致无边缘的凸曲面,则高斯映射是一一的且在上的.

证明 先证明在上的.

在单位球面(S)上任取 $\boldsymbol{n}_0$,因为 M 是有界的,则总能找到垂直于 $\boldsymbol{n}_0$ 的平面 π 及 π',使得 M 介于两平面之间. 设 π 是 n_0 所指方向上的那个平面. 因为 M 是 $\mathbf{R}^3$ 中的闭集,所以总可以在 M 上找到一点 P,使 P 到平面 π 的距离最小,自 P 点向平面 π 作垂线,

垂足为O. 以O为原点，$\boldsymbol{n}_0$的正向为z轴的正向，建立空间直角坐标系. 在M上包含P点的不大的邻域内，考虑过P点的任意光滑曲线σ，设

$$\sigma: \boldsymbol{r} = \{f(t), g(t), h(t)\},$$

其中$h(t)$是曲线上点$\boldsymbol{r}(t)$到π平面的距离. 在P点有

$$\boldsymbol{r}(P) = \{f(0), g(0), h(0)\}$$

切向量为

$$\boldsymbol{r}'(P) = \{f'(0), g'(0), h'(0)\}.$$

由于$h(t)$在$t=0$处取极小值，所以

$$h'(0) = 0,$$

即切向量垂直于z轴，亦即切向量垂直于$\boldsymbol{n}_0$. 由于曲线σ的任意性，可知P点处的M的单位法向量为$\boldsymbol{n}_0$（这时，P点处的切平面平行于π平面），所以$\boldsymbol{n}_0$的高斯映射的原像就是P，因而高斯映射是在上的.

以下再证明一一的.

高斯映射的雅可比行列式是曲面M与它在单位球面(S)上的像的面积元素之比

$$\frac{|\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v| \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K > 0,$$

根据逆函数定理，高斯映射在局部上是一一的. 下面证明在整体上也是一一的.

若高斯映射不是一一的，则在M上存在两个不同的点P和Q，经过高斯映射，映成(S)上同一个点$\boldsymbol{n}(P) = \boldsymbol{n}(Q)$. 由于高斯映射在局部上是一一的，因此存在$M$中$P$点的邻域$U$和$Q$点的邻域$V$，使得它们在高斯映射的作用下的像相同，即

$$\boldsymbol{n}(U) = \boldsymbol{n}(V).$$

我们从M中挖去V，并研究V在M中的余集上的高斯映射：

$$\boldsymbol{n}(M - V) = (S).$$

根据积分的参数变换公式

$$\int_{M-V} K\,\mathrm{d}A = \int_{M-V} (\text{高斯映射的雅可比})\,\mathrm{d}A = \int_{n(M-V)} \mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_{(S)} \mathrm{d}\sigma = 4\pi,$$

其中 $\mathrm{d}A$ 是曲面 M 上面积元素，$\mathrm{d}\sigma$ 是球面上对应的像的面积元素.

但是由高斯-波涅公式可得

$$\int_M K\,\mathrm{d}A = 4\pi,$$

所以

$$4\pi = \int_M K\,\mathrm{d}A = \int_{M-V} K\,\mathrm{d}A + \int_V K\,\mathrm{d}A = 4\pi + \int_V K\,\mathrm{d}A,$$

因而

$$\int_V K\,\mathrm{d}A = 0.$$

因为 $K>0$，所以 $V=\varnothing$，得到矛盾.

推论 卵形面一定位于它的每一点的切平面的同一侧.

证明 用反证法.

如果在卵形面 M 上有一点 A，在 A 点的切平面的两侧都有 M 的点，由于 M 是紧致的，所以在切平面的两侧分别有 M 上的点 B 和 C，它们离切平面最远.

可以证明①，B、C 两点处的切平面平行于 A 点处的切平面，每一个切平面有一个法方向，且互相平行，这样，A、B、C 三点的法方向中至少有两个是相同的，这就破坏了高斯映射的一一性，与定理矛盾.

注意：此推论的逆命题并不正确，因而不能用它作为卵形面的判定法. 例如椭圆抛物面在它的每一点的切平面的同侧，但椭圆抛物面并不是卵形面.

---

① 证明方法可参看阿达马定理证明中的有关部分.

(2) 球面的刻画

卵形面中最简单者，莫过于球面. 下面将深入讨论球面的重要特征.

定义 设曲面 M 的每一点处其主曲率是 k_1 和 k_2，如果主曲率之间存在某些函数关系

$$w(k_1, k_2) = 0,$$

则称 M 为 Weingarten 曲面，简称 W-曲面. 如果其中一个曲率是另一个曲率的单调递降函数，即

$$\frac{\mathrm{d}k_2}{\mathrm{d}k_1} < 0 \quad 或 \quad \frac{\partial w}{\partial k_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial k_2} > 0,$$

则称 M 为**椭圆型 W-曲面.**

例 5 常平均曲率曲面是椭圆型 W-曲面. 因为

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = c(常数),$$

所以

$$k_2 = -k_1 + 2c(常数)$$

例 6 正常高斯曲率曲面是椭圆型 W-曲面. 因为

$$K = k_1 \cdot k_2 = c(常数) > 0,$$

所以

$$w(k_1, k_2) \equiv k_1 \cdot k_2 - c(常数) = 0.$$

$$\frac{\partial w}{\partial k_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial k_2} = k_1 \cdot k_2 = c > 0.$$

引理 1 如果紧致连通曲面的每一点都是脐点，则此曲面是球面.

证明 因为曲面是紧致的，它有有限开覆盖 $\{M_i\}(i=1,\cdots,n)$. 在每一个开集 M_i 上，由于每一点都是脐点，根据曲面的局部理论，M_i 的高斯曲率为常数 K_i，但是在 $M_i \cap M_j$ 上 $K_i = K_j$，所以

$$K_1 = K_2 = \cdots = K_n = K.$$

因此在整个曲面上，高斯曲率是常数 K. 根据上节定理，$\mathbf{R}^3$ 中的紧致曲面一定存在一点 P 使 $K(P) > 0$，所以在整个曲面上有 $K =$

常数>0，因此，曲面必属于球面，但因曲面是紧致的，所以曲面是球面中的闭集；又曲面上每一点都属于某一开集 M_i，所以它又是球面上的开集. 由于曲面是连通的，所以曲面本身是整个球面.

引理 2 对于曲面上的非脐点 P_0，如果其主曲率 k_1 和 k_2 在 P_0 点分别为局部极大值和局部极小值，则 $K(P_0)\leqslant 0$.

证明 不妨假设 $k_1(P_0)>k_2(P_0)$，取曲率线网为坐标网，则坐标曲线的方向为主方向，这时有

$$\omega_1^3 = k_1\omega^1, \qquad \omega_2^3 = k_2\omega^2,$$

并且

$$d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega_2^1,\ d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2,$$
$$d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3,\ d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3,$$
$$d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2.$$

但是

$$d\omega_1^3 = dk_1 \wedge \omega^1 + k_1 d\omega^1,$$
$$d\omega_2^3 = dk_2 \wedge \omega^2 + k_2 d\omega^2.$$

根据曲面的结构方程

$$\omega_1^2 \wedge \omega_2^3 = d\omega_1^3 = dk_1 \wedge \omega^1 + k_1 d\omega^1,$$
$$\omega_1^2 \wedge k_2\omega^2 = d\omega_1^3 = dk_1 \wedge \omega^1 + k_1\omega^2 \wedge \omega_2^1,$$

所以有

$$dk_1 \wedge \omega^1 + (k_1 - k_2)\omega^2 \wedge \omega_2^1 = 0. \tag{4.12}$$

同理可得

$$dk_2 \wedge \omega^2 + (k_2 - k_1)\omega^1 \wedge \omega_1^2 = 0. \tag{4.13}$$

因为 ω^1 与 ω^2 线性无关，根据 Cartan 引理，dk_1 和 dk_2 可用 ω^1 与 ω^2 线性表示，命

$$dk_i = \sum_{j=1}^{2} k_{ij}\omega^j,\quad i = 1, 2,$$

$$dk_{ij} = \sum_{l=1}^{2} k_{ijl}\omega^l,\quad i, j = 1, 2.$$

因为

$$k_1(P_0) = \max k_1(P),$$
$$k_2(P_0) = \min k_2(P),$$

所以

$$k_{ij}(P_0) = 0,$$

并且

$$k_{1ii}(P_0) \leqslant 0, \quad k_{2ii}(P_0) \geqslant 0, \quad i = 1,2.$$

由于

$$dk_1 \wedge \omega^1 = k_{12}\omega^2 \wedge \omega^1,$$
$$dk_2 \wedge \omega^2 = k_{21}\omega^1 \wedge \omega^2,$$

代入(4.12),(4.13)得

$$k_{12}\omega^2 \wedge \omega^1 + (k_1 - k_2)\omega^2 \wedge \omega_2^1 = 0,$$
$$k_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 + (k_2 - k_1)\omega^1 \wedge \omega_1^2 = 0.$$

根据 Cartan 引理,

$$(k_1 - k_2)\omega_1^2 = a\omega^1 + b\omega^2,$$

所以有

$$k_{12}\omega^2 \wedge \omega^1 + a\omega^1 \wedge \omega^2 + b\omega^2 \wedge \omega^2 = 0.$$

于是,

$$a = k_{12}.$$

同样,有

$$k_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 + a\omega^1 \wedge \omega^1 + b\omega^2 \wedge \omega^1 = 0,$$

从而

$$b = k_{21}.$$

因此得到

$$(k_1 - k_2)\omega_1^2 = k_{12}\omega^1 + k_{21}\omega^2.$$

把上式再外微分一次,得到

$$(dk_1 - dk_2) \wedge \omega_1^2 + (k_1 - k_2)d\omega_1^2$$
$$= dk_{12} \wedge \omega^1 + k_{12}d\omega^1 + dk_{21} \wedge \omega^2 + k_{21}d\omega^2.$$

由于

$$d\omega_1^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2,$$

$$d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega_2^1 = \frac{k_{12}\omega^1 \wedge \omega^2}{k_1 - k_2},$$

$$d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2 = \frac{-k_{21}\omega^1 \wedge \omega^2}{k_1 - k_2},$$

$$dk_{12} = k_{121}\omega^1 + k_{122}\omega^2,$$

$$dk_{21} = k_{211}\omega^1 + k_{212}\omega^2,$$

所以

$$\begin{aligned} & -K(k_1 - k_2)\omega^1 \wedge \omega^2 \\ = & k_{122}\omega^2 \wedge \omega^1 + k_{211}\omega^1 \wedge \omega^2 + \frac{(k_{12}^2 - k_{21}^2)\omega^1 \wedge \omega^2}{k_1 - k_2} \\ & -(dk_1 - dk_2) \wedge \omega_1^2. \end{aligned}$$

但是在 P_0 点 $k_{ij}(P_0)=0, dk_i(P_0)=0$，所以

$$-K(P_0) = \frac{k_{211}(P_0) - k_{122}(P_0)}{k_1(P_0) - k_2(P_0)} \geqslant 0.$$

因而得到

$$K(P_0) \leqslant 0.$$

定理 紧致的、凸的、椭圆型 W-曲面是球面.

证明 设 M 是紧致的、凸的、椭圆型 W-曲面，不妨设 M 在某开集 M_i 上有

$$k_1(P) \geqslant k_2(P),$$

并且在 M_i 上存在一点 P_0，使得 $k_1(P_0) = \max k_1(P)$，又因为 M 是椭圆型 W-曲面，于是 $k_2(P_0) = \min k_2(P)$，所以有

$$k_1(P_0) \geqslant k_1(P) \geqslant k_2(P) \geqslant k_2(P_0).$$

如果 P_0 不是脐点，则

$$K(P_0) \leqslant 0,$$

这与 M 是凸的矛盾，所以断定 P_0 是脐点. 即有

$$k_1(P_0) = k_2(P_0).$$

因此，在 M_i 上每一点都是脐点. 以上的讨论，对于 M 的坐标覆盖中的每一个坐标域 M_i 均成立，所以 M 上每一点都是脐点，根据引理 1，M 一定是球面.

推论 1 紧致的、凸的常平均曲率曲面是球面.

推论 2 紧致的、凸的常高斯曲率曲面是球面.

附记:对于 $\mathbf{R}^3$ 中的紧致曲面来说,推论 2 中的"凸的"条件是不必要的。因为,根据 § 3.2 中的定理,$\mathbf{R}^3$ 中的紧致曲面上总存在一点 P_0,使得在这一点的高斯曲率 $K(P_0)>0$。如果紧致曲面是常曲率的,则它的高斯曲率 $K=K(P_0)>0$。所以,这个曲面一定是凸的。于是推论 2 就可以改述成**李普曼(Liebmann)定理:$\mathbf{R}^3$** 中的紧致常曲率曲面一定是球面。

(3) 卵形面的刚性

三维欧氏空间的一个曲面,它的形状一般是由其第一与第二基本形式所确定,但是如果有这样的曲面,当我们在保持它的度量不变(即不改变曲面的第一基本形式)的情况下,任何变换都不会改变它的形状,这样的曲面称之为**具有刚性的曲面**,换言之,对具有刚性的曲面作任何等距变换,都只是改变它在空间的位置,而不能使其扭曲变形.

下面我们将证明,卵形面是具有刚性的曲面,为此先介绍一个代数引理.

引理 1 给出两个正定的二次型

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2 \quad \text{和} \quad A'x^2+2B'xy+C'y^2,$$

如果

$$AC-B^2=A'C'-B'^2,$$

则

$$\begin{vmatrix} A-A' & B-B' \\ B-B' & C-C' \end{vmatrix} \leqslant 0,$$

当且仅当 $A=A'$,$B=B'$,$C=C'$ 时等号成立.

证明 因为 $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ 是正定的,所以

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=A\left[\left(x+\frac{B}{A}y\right)^2+\frac{AC-B^2}{A^2}y^2\right]>0,$$

因此

$$A>0,\ AC-B^2>0,\ C>0.$$

经过非奇异的线性变换

$$\begin{cases} x=a_1x^*+b_1y^*, \\ y=a_2x^*+b_2y^*, \end{cases} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

则正定二次型仍变成为正定的二次型

$$A^*(x^*)^2+2B^*x^*y^*+C^*(y^*)^2,$$

并有

$$A^*>0,\ A^*C^*-(B^*)^2>0,\ C^*>0,$$

$$\begin{vmatrix} A^* & B^* \\ B^* & C^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

同时,正定二次型 $A'x^2+2B'xy+C'y^2$ 经过非奇异线性变换,也变成正定的二次型

$$A'^*(x^*)^2+2B'^*x^*y^*+C'^*(y^*)^2,$$

并有

$$A'^*>0,\ A'^*C'^*-(B'^*)^2>0,\ C'^*>0,$$

$$\begin{vmatrix} A'^* & B'^* \\ B'^* & C'^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix}.$$

因为

$$AC-B^2=A'C'-(B')^2,$$

所以

$$A^*C^*-(B^*)^2=A'^*C'^*-(B'^*)^2.$$

以上说明了在我们的问题里,经非奇异线性变换后,所有条件都不改变. 因此,我们可以通过非奇异线性变换来解决问题. 不难找到一个适当的非奇异线性变换,使得

$$B^*=B'^*,$$

同时有

$$A^*C^*=A'^*C'^*,\ C^*>0,\ C'^*>0,$$

并且

$$\begin{vmatrix} A^* - A'^* & B^* - B'^* \\ B^* - B'^* & C^* - C'^* \end{vmatrix} = (A^* - A'^*)(C^* - C'^*)$$

$$= (A^* - A'^*)\left(\frac{A'^* C'^*}{A^*} - C'^*\right)$$

$$= -\frac{C'^*}{A^*}(A^* - A'^*)^2 \leqslant 0.$$

此外，如果上式等于零，则除 $B^* = B'^*$ 以外，我们还有

$$A^* = A'^*,$$

从而也有

$$C^* = C'^*.$$

引理 2（Minkowski 积分公式） 设 M 是 $\mathbf{R}^3$ 中的紧致曲面，H 和 K 分别是它的平均曲率和高斯曲率. 若函数 p 是原点到曲面上的点的切平面的距离，则有下列积分公式

$$\int_M \mathrm{d}A + \int_M pH\,\mathrm{d}A = 0,$$

$$\int_M H\,\mathrm{d}A + \int_M pK\,\mathrm{d}A = 0.$$

证明 设 $\boldsymbol{r}$ 是原点 O 到曲面 M 上点的向径，M 的局部表示是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$，其中坐标网选取正交网，并取 M 上的活动标架为

$$\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\},$$

其中 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 分别是坐标曲线的单位切向量，$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2$ 是曲面的单位法向量，于是有

$$p = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_3 = (\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2).$$

考虑混合积

$$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_3,\mathrm{d}\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e}_3)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{e}_3\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}),$$

若令

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_1 = X,\ \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_2 = Y,$$

则

$$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_3,\mathrm{d}\boldsymbol{r}) = Y\omega^1 - X\omega^2.$$

可以看出 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_3,\mathrm{d}\boldsymbol{r})$ 是与曲面的局部坐标系的选择无关的普法夫

形式. 取它的外微分

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_3,\mathrm{d}\boldsymbol{r}) = (\mathrm{d}\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_3,\mathrm{d}\boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{r},\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3,\mathrm{d}\boldsymbol{r}),$$

在上式中,元素之间的乘积是外微分的外积,所以$(\mathrm{d}\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_3,\mathrm{d}\boldsymbol{r})$一般并不为零.

根据曲面的结构方程

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \omega^1\boldsymbol{e}_1 + \omega^2\boldsymbol{e}_2, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 = \omega_3^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_3^2\boldsymbol{e}_2,$$
$$\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2,\ \omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2,$$

我们得到

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_3,\mathrm{d}\boldsymbol{r}) = -2(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\omega^1\wedge\omega^2 + (\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)(\omega_3^1\wedge\omega^2 - \omega_3^2\wedge\omega^1).$$

由于

$$\omega_3^1 = -\omega_1^3 = -(a\omega^1 + b\omega^2),$$
$$\omega_3^2 = -\omega_2^3 = -(b\omega^1 + c\omega^2),$$

所以

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)(\omega_3^1\wedge\omega^2 - \omega_3^2\wedge\omega^1)\\ &= (\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)(-a-c)\omega^1\wedge\omega^2\\ &= -(k_1+k_2)(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\omega^1\wedge\omega^2\\ &= -2Hp\,\mathrm{d}A,\end{aligned}$$

从而有

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_3,\mathrm{d}\boldsymbol{r}) = -2\mathrm{d}A - 2Hp\,\mathrm{d}A.$$

把上式两边对整个曲面 M 积分,由于曲面是紧致的,应用斯托克斯公式,可以得到

$$\int_M \mathrm{d}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_3,\mathrm{d}\boldsymbol{r}) = \int_{\partial M}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_3,\mathrm{d}\boldsymbol{r}) = 0,$$

因而有

$$\int_M \mathrm{d}A + \int_M pH\,\mathrm{d}A = 0.$$

再考虑混合积$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_3,\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3)$,它也是与局部坐标系的选择无关的普法夫形式,外微分后得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_3,\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3) &= (\mathrm{d}\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_3,\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3)+(\boldsymbol{r},\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3,\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3)\\
&= (\omega^2\wedge\omega_3^1-\omega^1\wedge\omega_3^2)(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)+2(\omega_3^1\wedge\omega_3^2)(\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\\
&= (a+c)\omega^1\wedge\omega^2+2p(ac-b^2)\omega^1\wedge\omega^2\\
&= 2H\mathrm{d}A+2pK\mathrm{d}A.
\end{aligned}
$$

把上式两边对整个曲面 M 积分，根据斯托克斯公式

$$\int_M H\mathrm{d}A+\int_M pK\mathrm{d}A=0.$$

注意：如果我们再考虑混合积$(\boldsymbol{r},\mathrm{d}\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})$，其中 $\boldsymbol{c}$ 是任一常向量，则得积分公式

$$\int_M \boldsymbol{e}_3\mathrm{d}A=0.$$

这是因为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\boldsymbol{r},\mathrm{d}\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}) &= (\mathrm{d}\boldsymbol{r},\mathrm{d}\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})=(\omega^1\boldsymbol{e}_1+\omega^2\boldsymbol{e}_2,\omega^1\boldsymbol{e}_1+\omega^2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{c})\\
&= 2(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{c})\omega^1\wedge\omega^2=2\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{c}\mathrm{d}A,
\end{aligned}
$$

两边在整个曲面上积分，得

$$\int_M 2\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{c}\mathrm{d}A=2\boldsymbol{c}\cdot\int_M\boldsymbol{e}_3\mathrm{d}A=0,$$

所以

$$\int_M\boldsymbol{e}_3\mathrm{d}A=0.$$

定理（Cohn-Vossen 定理） 两个卵形面之间如果存在一个保长映射，则这个映射一定是 $\mathbf{R}^3$ 中的合同或对称.

证明 设两个卵形面 M 和 M'之间存在保长映射

$$f:M\longrightarrow M'.$$

再设 M 与 M' 的第一、第二基本形式分别为 Ⅰ、Ⅱ、Ⅰ′、Ⅱ′. 由题设知，在映射 f 下，对应点有相同的第一基本形式，即 Ⅰ = Ⅰ′. 下面我们要证明在 M 与 M'之间，对应点有相同的第二基本形式. 为方便起见，在曲面 M 和 M' 上选取适当的坐标系，使曲面在对应点有相同的参数 u^1、u^2，并在 M 上取正交坐标网，由于 f 是保长映射，所以在 M' 上也是正交坐标网，

$$\omega^1 = \sqrt{E}\mathrm{d}u^1, \qquad \omega^2 = \sqrt{G}\mathrm{d}u^2,$$

$$(\omega^1)' = \sqrt{E'}\,\mathrm{d}u^1, \qquad (\omega^2)' = \sqrt{G'}\,\mathrm{d}u^2.$$

由于 M 与 M' 上对应点有相同的坐标，所以

$$\omega' = \lambda_1(\omega^1)', \ \omega^2 = \lambda_2(\omega^2)'.$$

但是 $\mathrm{d}u^1$ 与 $\mathrm{d}u^2$ 线性无关，将上式代入

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = (\omega^1)'^2 + (\omega^2)'^2,$$

即得

$$\omega^1 = \pm(\omega^1)', \qquad \omega^2 = \pm(\omega^2)',$$

即

$$\lambda_1 = \pm 1, \qquad \lambda_2 = \pm 1,$$

适当选择坐标网，使 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. 这样就有

$$\omega^1 = (\omega^1)', \qquad \omega^2 = (\omega^2)'.$$

由结构方程得

$$\omega_1^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2}\right)\omega^1 + \left(\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}\right)\omega^2 = (\omega_1^2)',$$

又因为

$$\mathrm{d}\omega_1^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2, \qquad \mathrm{d}(\omega_1^2)' = -K'\omega^1 \wedge \omega^2,$$

所以

$$K' = K.$$

我们还有

$$\mathrm{d}A = \omega^1 \wedge \omega^2 = (\omega^1)' \wedge (\omega^2)' = \mathrm{d}A'.$$

余下的问题是要证明

$$\omega_1^3 = (\omega_1^3)', \qquad \omega_2^3 = (\omega_2^3)'.$$

因为

$$\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \ \omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2,$$

$$(\omega_1^3)' = a'(\omega^1)' + b'(\omega^2)', \ (\omega_2^3)' = b'(\omega^1)' + c'(\omega^2)'.$$

所以只需证明

$$a' = a, \ b' = b, \ c' = c.$$

设

$$x = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_1,\ y = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_2,\ p = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_3$$

则
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{e}_1 \\
&= (\omega^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega^2 \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{r} \cdot (\omega_1^2 \boldsymbol{e}_2 + \omega_1^3 \boldsymbol{e}_3) \\
&= \omega^1 + y\omega_1^2 + p\omega_1^3 \\
\mathrm{d}y &= \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{e}_2 \\
&= (\omega^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega^2 \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{r} \cdot (\omega_2^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_2^3 \boldsymbol{e}_3) \\
&= \omega^2 + x\omega_2^1 + p\omega_2^3
\end{aligned}$$

计算微分形式 $x(\omega_2^3)' - y(\omega_1^3)'$ 的外微分：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(x(\omega_2^3)' - y(\omega_1^3)') \\
&= \mathrm{d}x \wedge (\omega_2^3)' + x\mathrm{d}(\omega_2^3)' - \mathrm{d}y \wedge (\omega_1^3)' - y\mathrm{d}(\omega_1^3)' \\
&= \omega^1 \wedge (\omega_2^3)' + p\omega_1^3 \wedge (\omega_2^3)' - \omega^2 \wedge (\omega_1^3)' - p\omega_2^3 \wedge (\omega_1^3)' \\
&= \omega^1 \wedge (\omega_2^3)' - \omega^2 \wedge (\omega_1^3)' + p(\omega_1^3 \wedge (\omega_2^3)' - \omega_2^3 \wedge (\omega_1^3))' \\
&= (a' + c')\omega' \wedge \omega^2 + p(ac' + a'c - 2bb')\omega^1 \wedge \omega^2 \\
&= 2H'\mathrm{d}A + pJ\mathrm{d}A,
\end{aligned}$$

其中

$$H' = \frac{a' + c'}{2}$$

$$\begin{aligned}
J &= a'c - 2bb' + ac' \\
&= a'c - 2bb' + ac' + ac - b^2 - (a'c' - b'^2) \\
&= ac + ac' + a'c - a'c' - b^2 - 2bb' + b'^2 \\
&= 2(ac - b^2) - [ac - ac' - a'c + a'c' - b^2 + 2bb' - b'^2] \\
&= 2(ac - b^2) - [(a - a')(c - c') - (b - b')^2] \\
&= 2K - \begin{vmatrix} a - a' & b - b' \\ b - b' & c - c' \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

把上式两边在整个紧致曲面 M 上积分，根据斯托克斯公式，得

$$\begin{aligned}
&2\int_M H'\mathrm{d}A + \int_M p\left(2K - \begin{vmatrix} a - a' & b - b' \\ b - b' & c - c' \end{vmatrix}\right)\mathrm{d}A \\
&= \int_M \mathrm{d}(x(\omega_2^3)' - y(\omega_1^3)') = \int_{\partial M} (x(\omega_2^3)' - y(\omega_1^3)')
\end{aligned}$$

$$= 0.$$

所以有

$$\int_M p\left(2K - \begin{vmatrix} a-a' & b-b' \\ b-b' & c-c' \end{vmatrix}\right)\mathrm{d}A = -2\int_M H'\mathrm{d}A.$$

根据闵可夫斯基积分公式

$$2\int_M H\,\mathrm{d}A + 2\int_M 2pK\,\mathrm{d}A = 0,$$

可得

$$-\int_M p\begin{vmatrix} a-a' & b-b' \\ b-b' & c-c' \end{vmatrix}\mathrm{d}A = 2\int_M (H-H')\mathrm{d}A.$$

移动曲面 M,使得原点取在 M 包围的区域内,此时有 $p>0$,再根据引理 1,有

$$\int_M (H-H')\mathrm{d}A \geqslant 0,$$

即

$$\int_M H\,\mathrm{d}A \geqslant \int_M H'\mathrm{d}A.$$

再计算 $\mathrm{d}(x'(\omega_2^3)-y'(\omega_1^3))$可以推出

$$\int_M H'\mathrm{d}A \geqslant \int_M H\,\mathrm{d}A.$$

所以必须有

$$\int_M H\,\mathrm{d}A = \int_M H'\mathrm{d}A,$$

因此

$$\int_M p\begin{vmatrix} a-a' & b-b' \\ b-b' & c-c' \end{vmatrix}\mathrm{d}A = 0.$$

于是推导出

$$\begin{vmatrix} a-a' & b-b' \\ b-b' & c-c' \end{vmatrix} = 0,$$

从而得

$$a = a',\ b = b',\ c = c',$$

即保长映射 f 是 $\mathbf{R}^3$ 中的合同或对称.

给出两个卵形面 M 和 M',我们可以在它们之间建立点与点之间的对应关系,为此考虑高斯映射 $\boldsymbol{n}: M \to (S)$,根据阿达马定理,$\boldsymbol{n}$ 是一一的和在上的,因此存在逆映射 $\boldsymbol{n}^{-1}: (S) \to M$.

同理,对于曲面 M',也有映射 $\boldsymbol{n}': M' \to (S)$, $\boldsymbol{n}'^{-1}: (S) \to M'$.

这样,以单位球面为桥梁,就在 M 与 M' 之间建立了点的一一对应关系.

考虑两个卵形面在对应点有相同的高斯曲率的情形:

$$K[\boldsymbol{n}^{-1}(\xi)] = K'[\boldsymbol{n}'^{-1}(\xi)].$$

我们有如下的定理

定理 给出两个卵形面 M 与 M',如果对于 $\xi \in (S)$ 有

$$K[\boldsymbol{n}^{-1}(\xi)] = K'[\boldsymbol{n}'^{-1}(\xi)],$$

则 M 与 M' 只差一个空间合同或对称.

证明 如图 4-32 所示,球面 (S) 上任一点 ξ 分别对应 M 和 M' 上的点 $\boldsymbol{n}^{-1}(\xi)$ 和 $\boldsymbol{n}'^{-1}(\xi)$,在 (S)、M、M' 上取相同的局部坐标,

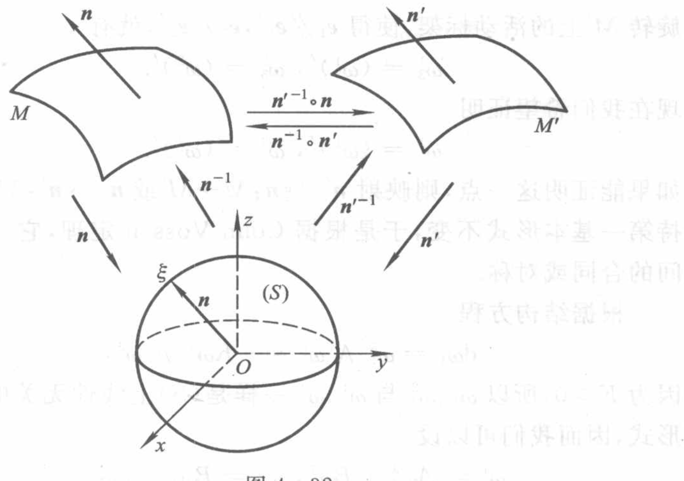


图 4-32

使得 ξ、$\boldsymbol{n}^{-1}(\xi)$、$\boldsymbol{n}'^{-1}(\xi)$有相同的坐标$(u^1,u^2)$.

在 M 上选取一活动标架,设其对应的相对分量为 ω^1、ω^2、ω_1^2、ω_1^3、ω_2^3,通过映射$(\boldsymbol{n}^{-1})^*$(称为扯回映射,它把 M 上的相对分量扯回到(S)上)把这些普法夫形式诱导成(S)上的普法夫形式,由于我们取了相同的局部坐标,我们就可以把(S)上的对应普法夫形式仍记成

$$\omega^1、\omega^2、\omega_1^2、\omega_1^3、\omega_2^3.$$

同样,在 M' 上选取活动标架,设其对应的相对分量为$(\omega^1)'$、$(\omega^2)'$、$(\omega_1^2)'$、$(\omega_1^3)'$、$(\omega_2^3)'$. 映射$(\boldsymbol{n}'^{-1})^*$把 M' 上的相对分量诱导成(S)上的普法夫形式

$$(\omega^1)'、(\omega^2)'、(\omega_1^2)'、(\omega_1^3)'、(\omega_2^3)'.$$

由于 M 与 M' 上的对应点的法向量相同,即

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}' \qquad (\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3'),$$

于是有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 = \mathrm{d}\boldsymbol{e}_3'.$$

也就是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 = \omega_3^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_3^2\boldsymbol{e}_2 = (\omega_3^1)'\boldsymbol{e}_1' + (\omega_3^2)'\boldsymbol{e}_2' = \mathrm{d}\boldsymbol{e}_3'.$$

旋转 M' 上的活动标架,使得 $\boldsymbol{e}_1 /\!/ \boldsymbol{e}_1'$,$\boldsymbol{e}_2 /\!/ \boldsymbol{e}_2'$,就有

$$\omega_3^1 = (\omega_3^1)',\ \omega_3^2 = (\omega_3^2)'.$$

现在我们希望证明

$$\omega^1 = (\omega^1)',\ \omega^2 = (\omega^2)'.$$

如果能证明这一点,则映射 $\boldsymbol{n}'^{-1}\circ\boldsymbol{n}: M\to M'$ 或 $\boldsymbol{n}^{-1}\circ\boldsymbol{n}': M'\to M$ 保持第一基本形式不变,于是根据 Cohn-Vossen 定理,它一定是空间的合同或对称.

根据结构方程

$$\mathrm{d}\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2, \tag{4.14}$$

因为 $K>0$,所以 ω_1^3、ω_3^2 与 ω^1、ω^2 一样是(S)上线性无关的普法夫形式,因而我们可以设

$$\omega^1 = A\omega_1^3 + B\omega_2^3,\ \omega^2 = B\omega_1^3 + C\omega_2^3,$$

$$(\omega^1)' = A'(\omega_1^3)' + B'(\omega_2^3)' = A'\omega_1^3 + B'\omega_2^3,$$
$$(\omega^2)' = B'(\omega_1^3)' + C'(\omega_2^3)' = B'\omega_1^3 + C'\omega_2^3.$$

由(4.14)有

$$\begin{aligned} d\omega_1^2 &= \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= -K(A\omega_1^3 + B\omega_2^3) \wedge (B\omega_1^3 + C\omega_2^3) \\ &= -K(AC - B^2)\omega_1^3 \wedge \omega_2^3. \end{aligned}$$

同理，

$$\begin{aligned} d(\omega_1^2)' &= -K(A'C' - B'^2)(\omega_1^3)' \wedge (\omega_2^3)' \\ &= -K(A'C' - B'^2)\omega_1^3 \wedge \omega_2^3. \end{aligned}$$

所以

$$AC - B^2 = A'C' - B'^2 = \frac{1}{K}.$$

现在我们要证明 $A=A', B=B', C=C'$.

计算混合积$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', d\boldsymbol{r}')$的外微分

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', d\boldsymbol{r}') &= (d\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', d\boldsymbol{r}') + (\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{r}', d\boldsymbol{r}') \\ &= (\omega^1\boldsymbol{e}_1 + \omega^2\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{r}', (\omega^1)'\boldsymbol{e}_1 + (\omega^2)'\boldsymbol{e}_2) + \\ &\quad (\boldsymbol{r}, (\omega^1)'\boldsymbol{e}_1 + (\omega^2)'\boldsymbol{e}_2, (\omega^1)'\boldsymbol{e}_1 + (\omega^2)'\boldsymbol{e}_2) \\ &= [\omega' \wedge (\omega^2)' - \omega^2 \wedge (\omega^1)'](\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{e}_2) + \\ &\quad [(\omega^1)' \wedge (\omega^2)' - (\omega^2)' \wedge (\omega^1)'](\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2). \end{aligned}$$

令

$$p = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2),\ p' = (\boldsymbol{r}', \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2),$$

则上式为

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', d\boldsymbol{r}') &= p'[-\omega' \wedge (\omega^2)' + \omega^2 \wedge (\omega^1)'] + \\ &\quad p[2(\omega^1)' \wedge (\omega^2)']. \end{aligned}$$

但上式中的

$$\begin{aligned} &-\omega' \wedge (\omega^2)' + \omega^2 \wedge (\omega^1)' \\ &= -(A\omega_1^3 + B\omega_2^3) \wedge (B'\omega_1^3 + C'\omega_2^3) + \\ &\quad (B\omega_1^3 + C\omega_2^3) \wedge (A'\omega_1^3 + B'\omega_2^3) \\ &= (-AC' + BB' + BB' - A'C)\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 \end{aligned}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} A-A' & B-B' \\ B-B' & C-C' \end{vmatrix} - \frac{2}{K} \right) \omega_1^3 \wedge \omega_2^3,$$

并且

$$\begin{aligned} (\omega^1)' \wedge (\omega^2)' &= (A'\omega_1^3 + B'\omega_2^3) \wedge (B'\omega_1^3 + C'\omega_2^3) \\ &= (A'C' - B'^2)\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 \\ &= \frac{1}{K}\omega_1^3 \wedge \omega_2^3, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \mathrm{d}\boldsymbol{r}') \\ = & \left\{ \left[p' \begin{vmatrix} A-A' & B-B' \\ B-B' & C-C' \end{vmatrix} - \frac{2}{K} p' \right] + p \cdot \frac{2}{K} \right\} \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 \\ = & \left\{ p' \begin{vmatrix} A-A' & B-B' \\ B-B' & C-C' \end{vmatrix} + \frac{2}{K}(p - p') \right\} \omega_1^3 \wedge \omega_2^3. \end{aligned}$$

将上式两边在球面上积分,根据斯托克斯公式

$$\begin{aligned} & \int_{(S)} \left\{ p' \begin{vmatrix} A-A' & B-B' \\ B-B' & C-C' \end{vmatrix} + \frac{2}{K}(p - p') \right\} \omega_1^3 \wedge \omega_2^3. \\ = & \int_{(S)} \mathrm{d}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \mathrm{d}\boldsymbol{r}') = \int_{\partial S} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \mathrm{d}\boldsymbol{r}') = 0. \end{aligned}$$

再计算 $\mathrm{d}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \mathrm{d}\boldsymbol{r}')$,可以推出

$$\int_{(S)} \left\{ p \begin{vmatrix} A-A' & B-B' \\ B-B' & C-C' \end{vmatrix} + \frac{2}{K}(p' - p) \right\} \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = 0.$$

把上两式相加得

$$\int_{(S)} (p + p') \begin{vmatrix} A-A' & B-B' \\ B-B' & C-C' \end{vmatrix} \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = 0.$$

移动 M 和 M' 的位置,使 $p>0$ 且 $p'>0$,但根据引理有

$$\begin{vmatrix} A-A' & B-B' \\ B-B' & C-C' \end{vmatrix} \leqslant 0,$$

因此,只可能有

$$\begin{vmatrix} A-A' & B-B' \\ B-B' & C-C' \end{vmatrix} = 0.$$

再根据引理就得到

$$A=A',B=B',C=C'.$$

3.4 完备曲面

（1）测地完备曲面

在第二章中，我们已经讨论过测地线，即曲面上测地曲率处处为零的曲线. 设 P 是曲面 M 上一点，$T_P(M)$是曲面 M 在 P 点的切平面. 给出 M 在 P 点的一个切向量 $\boldsymbol{v}\in T_P(M)$，则在 M 上 P 点的充分小的邻域 U 内，存在一条从 P 点出发并切于$\boldsymbol{v}$ 的测地线 $C(t)(a\leqslant t\leqslant b)$，使得 $C(a)=P, C(t)\subset U$.

在第二章§6.4中，我们还证明了：给出曲面 M 上一个充分小的邻域 U，对于 U 中任意两点，总存在一条联结它们的测地线，使得这条测地线是曲面上联结这两点的曲线中弧长最短的.

我们现在提出的问题是：以上关于曲面上测地线的局部的结果能不能整体地推广到曲面上. 对于一般曲面是不能的，举两个简单的例子：圆柱面上的直母线是测地线，但是如果直母线上有一个窟窿，则联结窟窿两侧的直母线上的点的这条测地线不存在；球面上的大圆弧是测地线，但是如果这个大圆弧上有一个洞的话，那么从大圆弧上一点出发的并切于大圆弧的测地线沿着大圆弧延伸，延到这个洞旁边就延伸不下去了. 因此，只是对于一些特殊的曲面，第二章中关于曲面上测地线的局部上的结果才能整体地推广到这些曲面上. 这些特殊的曲面就是**完备曲面**. 例如没有窟窿或洞的球面、圆柱面就是完备曲面.

在这一小节中，我们将先讨论**测地完备曲面**. 下面我们先定义从切平面 $T_P(M)$到曲面 M 上的**指数映射**.

定义 设曲面 M 在 P 点的切向量 $\boldsymbol{v}$ 的长度为 ε，即 $|\boldsymbol{v}|=\varepsilon$，作 M 上从 P 点出发并切于$\boldsymbol{v}$ 的测地线 $C(s)(0\leqslant s\leqslant\varepsilon)$，其中参数 s 是测地线的弧长. 我们把这条测地线的终点 $C(\varepsilon)$记成 $\exp_P(\boldsymbol{v})$，于是我们得到从切平面 $T_P(M)$到曲面 M 上的映射

$$\exp_P: T_P(M) \to M, \boldsymbol{v} \mapsto \exp_P(\boldsymbol{v}),$$

这个映射称为曲面 M 在 P 点的**指数映射**. 测地线的终点 $C(\varepsilon)=\exp_P(\boldsymbol{v})$称为切向量 $\boldsymbol{v}$ 在指数映射下的像.

对于一般曲面 M 来说,在 P 点的指数映射只是在这一点的切向量 $\boldsymbol{v}$ 的长度充分小时才有定义. 也就是说:必须要求 $\boldsymbol{v}\in T_P(M)$的像属于 M 上 P 点的充分小邻域 U 时才有定义. 换言之指数映射 $\exp_P$ 的定义域是切平面 $T_P(M)$上以 P 为中心半径充分小的实圆(ball). 现在的问题是:指数映射的定义域能不能扩充到整个切平面 $T_P(M)$上呢? 上面已举例说明,一般来说是不能的,只是对于一些特殊的曲面才是可能的.

定义 如果对于曲面 M 上任何一点 P 以及 P 点任何一个切向量 $\boldsymbol{v}\in T_P(M)$,指数映射 $\exp_P(\boldsymbol{v})$都是有定义的. 即对于 $\forall P\in M, \forall \boldsymbol{v}\in T_P(M)$,在 M 上存在 $\exp_P(\boldsymbol{v})$,则我们把曲面 M 称为**测地完备曲面**. 换言之,对于一个曲面,如果从它的任一点出发的测地线可以无限延伸的话,则这个曲面就是**测地完备曲面**. 以上两种测地完备曲面的定义是等价的.

定义 设 M 是测地完备曲面,P 是 M 上一点,在切平面 $T_P(M)$上以 P 为心,δ 为半径的圆在指数映射 $\exp_P$ 下的像,称为曲面 M 上以 P 为中心的**测地圆**. 它的半径是 M 上从 P 点出发长度为 δ 的测地线.

通过指数映射,我们可以把曲面 M 在 P 点的切平面 $T_P(M)$上圆的性质转移到曲面 M 上面得到测地圆的性质. 例如:切平面上的圆把切平面分成内部和外部,联结内部点和外部点的任何曲线必与圆周相交;所以类似地,曲面上的测地圆也把曲面分成内部与外部,联结内部点和外部点的曲线必与测地圆周相交. 此外,切平面的实圆是紧致的(即可有限覆盖的),则曲面上的测地实圆也是紧致的.

(2) 曲面上的距离

从这一小节开始,我们总假定曲面是连通的,这一点不再重复

说明. 此外,我们提醒读者注意本章 3.2 节的一条定理,它说明:连通的曲面一定是弧连通的,即任给曲面上两点,存在联结它们的曲线. 由于我们假定所讨论的曲面是 C^∞ 类的,所以我们还假定:联结曲面上任两点的曲线是逐段光滑的.

任给曲面 M 上两点 P 和 Q:$C(t)(a=t_0<t_1<\cdots<t_k<t_{k+1}=b)$是联结 P 和 Q 的逐段光滑曲线,即 $C(a)=P, C(b)=Q$, $C(t)(t_i<t<t_{i+1}, i=0, 1,\cdots,k)$是 C^∞ 类曲线,我们把这条曲线记成 C_{PQ},它的长度可以定义为

$$l(C_{PQ})=\sum_{i=0}^{k}\int_{t_i}^{t_{i+1}}|C'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

定义 我们把曲面 M 上两点 P 和 Q 的距离定义为:联结 P 和 Q 的任意曲线 C_{PQ} 的长度的下确界,

$$d(P,Q)=\inf_{C_{PQ}}[l(C_{PQ})].$$

命题 曲面 M 上的距离具有以下性质:

1) $d(P,Q)=d(Q,P)$;

2) $d(P,Q)+d(Q,R)\geqslant d(P,R)$;

3) $d(P,Q)\geqslant 0$ 而且 $d(P,Q)=0$ 当且仅当 $P=Q$,因此,曲面 M 对于距离 d 来说,是一个度量空间.

证明 性质 1),2)和 3)的前半部分可以从距离 d 的定义直接推出,下面只证明:性质 3)的后半部分.

如果 $P=Q$,考虑常值曲线 $C(t)\equiv P$ 或 $Q(a\leqslant t\leqslant b)$,则显然有 $l[C(t)\equiv P]=0$. 对于其他任何以 P 为始点和终点的曲线来说,$l[C_{PP}]\geqslant 0$,所以

$$\inf_{C_{PP}}[l(C_{PP})]=l[C(t)\equiv P]=0.$$

反之,如果 $d(P,Q)=0$. 我们用反证法,设 $P\neq Q$,则存在 M 上以 P 为中心,充分小正数 δ 为半径的测地圆,使得 Q 点在测地圆的外部,但是任何联结测地圆心 P 和外部点 Q 的曲线必与测地圆周交于一点R,于是

$$l(C_{PQ}) = l(C_{PR}) + l(C_{RQ}) \geqslant \delta + l(C_{RQ}) > \delta,$$

即 $d(P,Q)=\inf\limits_{C_{PQ}}[l(C_{PQ})]\geqslant\delta>0$，与假设 $d(P,Q)=0$ 矛盾. 命题证毕.

推论 1 $|d(P,R)-d(Q,R)|\leqslant d(P,Q)$

推论 2 设 P_0 是曲面 M 上一固定点，则 M 上的距离函数

$$d(P) = d(P_0,P),\ P \in M$$

是 M 上的连续函数，即

$$\lim_{Q\to P} d(Q) = d(P).$$

证明 任给小正数 ε，取更小的正数 $\delta<\varepsilon$，则当 $d(P,Q)<\delta$时，

$$|d(P)-d(Q)| = |d(P_0,P)-d(P_0,Q)| \leqslant d(P,Q) < \delta < \varepsilon.$$

(3) 测地完备曲面上测地线的最短性

对于一般曲面来说，测地线在局部上是最短的. 但是，在这一小节中，我们将指出：对于测地完备曲面来说，测地线在整体上也是最短的.

定理 如果曲面 M 是测地完备的，则对于 M 上任两点 P 和 Q 来说，联结它们长度最短的曲线是测地线(如图 4-33).

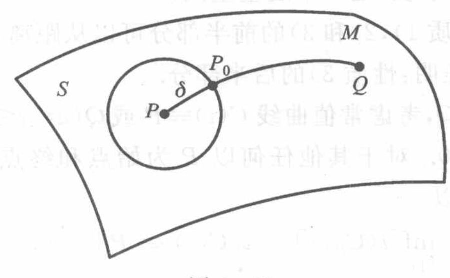


图 4-33

证明 任给两点 $P,Q\in M$，设它们的距离是 $d(P,Q)=r>0$，我们希望指出：存在一条联结点 P 和 Q 的测地线，它的长度正好是 r. 根据曲面上距离的定义，这条测地线就是联结 P 和 Q 的曲

线中的长度最短的.

根据第二章 6.4 节的定理，存在 M 上点 P 的充分小邻域 U，使得 U 中任何一点能够与 P 是用最短测地线相联结. 命 S 是 U 中以 P 点为中心，充分小正数 δ 为半径的测地圆周，由于 S 是紧致的，所以总存在一点 $P_0 \in S$ 使得 $d(P_0, Q)$ 是 Q 点到圆周 S 上各点之间的距离的最短者. 然后我们再作测地半径 $\widehat{PP_0}$，它的长度是 δ、我们希望测地线 $\widehat{PP_0}$ 可以延伸到 Q 点，而且测地线 $\widehat{PQ}$ 的长度正好等于 r.

设测地线 $\widehat{PP_0}$ 在 P 点的单位切向量是 $\boldsymbol{v}$，则测地线 $\widehat{PP_0}$ 的参数表示是:

$$C(t) = \exp_P(t\boldsymbol{v}) \qquad (0 \leqslant t < \delta).$$

我们希望:这个参数表示的定义域能够延伸到 $t=r$，即上述参数表示也能定义在$[\delta, r]$上，并且使 $C(r)=\exp_P(r\boldsymbol{v})=Q$. 为此，我们希望证明:对于 $\forall t \in [\delta, r]$，我们有

$$d(C(t), Q) = r - t. \qquad (*)$$

我们先证明:$(*)$式对于 $t=\delta$ 成立，即 $d(C(\delta), Q)=r-\delta$. 设 C_{PQ} 是任意联结点 P 和 Q 的曲线，它必与测地圆周 S 交于一点 N，

$$r = d(PQ) = \inf_{C_{PQ}}[l(C_{PN}) + l(C_{NQ})] = \delta + d(P_0, Q),$$

即 $d(P_0, Q)=r-\delta$. 但是 $C(\delta)=\exp_P(\delta\boldsymbol{v})=P_0$，所以

$$d(C(\delta), Q) = r - \delta.$$

再设 $t_0 \in [\delta, r]$是使$(*)$式成立的 t 值的上确界

$$t_0 = \sup_{t \in [\delta, r]}\{d(C(t), Q) = r - t\},$$

根据距离函数的连续性，$t \to t_0$ 时，$(*)$式趋于等式 $d(C(t_0), Q) = r - t_0$. 下面要证明:$t_0 = r$.

用反证法. 设 $t_0 < r$，命 $\delta' = \min(\delta, r - t_0)$. 如图 4-34 所示，在 M 上作以 $C(t_0)$为中心，δ'为半径的测地圆周 S'，再命 P'_0 是 S' 上与点 Q 距离最短的点. 设 γ 是任意联结点 $C(t_0)$和 Q 点的曲线，它交 S' 于一点 N，

$$d(C(t_0),Q)=\inf_{\gamma}\{d(C(t_0),N)+d(N,Q)\}=\delta'+d(P'_0,Q),$$
$$d(P'_0,Q)=d(C(t_0),Q)-\delta'=(r-t_0)-\delta'=r-(t_0+\delta').$$

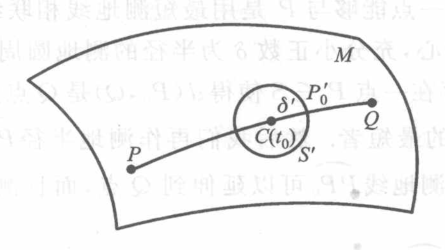


图 4-34

其中 t_0 是从 P 到 $C(t_0)$ 的测地线的长度，δ' 是从 $C(t_0)$ 到 P'_0 的测地线的长度，

$$t_0=l(P,C(t_0))\geqslant d(P,C(t_0)),\delta'=l(C(t_0),P'_0)\geqslant d(C(t_0),P'_0),$$

所以

$$d(P,P'_0)\leqslant d(P,C(t_0))+d(C(t_0),P'_0)\leqslant t_0+\delta'.$$

但是

$$d(P,P'_0)\geqslant |d(P,Q)-d(P'_0,Q)|=r-\{r-(t_0+\delta')\}=t_0+\delta'.$$

所以，惟一的可能是 $C(t_0)$ 在从 P 和 P'_0 的测地线上，并且

$$l(P,C(t_0))=d(P,C(t_0)),l(C(t_0),P'_0)=d(C(t_0),P'_0),$$
$$l(P,P'_0)=l(P,C(t_0))+l(C(t_0),P'_0)=t_0+\delta'=d(P,P'_0).$$

这证明：$C(t_0+\delta')=P'_0$，测地线可以延伸到 $t=t_0+\delta'$，这与 t_0 是上确界的假设矛盾. 定理证毕.

(4) 完备曲面

我们在第(2)小节中已经讨论过，如果在曲面上定义了距离以后，这个曲面就成为一个度量空间. 在这一小节中，我们将进一步阐明：如果曲面是测地完备的，则它就是一个完备度量空间.

定义 曲面 M 上定义了距离 d，对于 M 中一个点列 $\{P_k\}$，如

果任给小正数 ε,存在充分大的自然数 N,使得对任何自然数 n,l,当 $n>l>N$ 时,$d(P_n,P_l)<\varepsilon$,则点列 $\{P_k\}$ 称为曲面 M 上的 **Cauchy 点列**.

显然 M 上的 Cauchy 点列 $\{P_k\}$ 是有界的. 因为有限点集 $\{P_1,\cdots,P_N\}$ 有界,再加上点列的剩余部分 $\{P_{N+1},P_{N+2},\cdots\}$,由于后者包括在以 P_{N+1} 为中心,ε 为半径的测地实圆内,所以整个 Cauchy 点列是有界的.

定理(Hopf-Rinow 定理) 对于曲面 M 来说,以下三个条件是等价的.

1) M 是完备度量空间;

2) M 是测地完备曲面;

3) M 上每一有界点集的闭包是紧致的.

证明 1)⇒2). 设曲面 M 是完备度量空间,它的任意一个 Cauchy 点列 $\{P_k\}$ 是收敛的,而且极限点属于 M. 设 P 是 M 上任一点,如果从 P 点出发的一条测地线延伸到长度 L 以后不能再继续延伸了. 命这条测地线的参数表示是 $C(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$,$C(0)=P$,则极限点 $\lim\limits_{t\to 1}C(t)$ 不能存在,不然的话,设 $\lim\limits_{t\to 1}C(t)=Q$,定义 $C(1)=Q$,由于测地线是光滑的,则 $\lim\limits_{t\to 1}C'(t)$ 也存在,于是这条测地线又能从 Q 点继续延伸,它的长度将大于 L,与前面的假设矛盾,所以 $\lim\limits_{t\to 1}C(t)$ 不存在.

任取单调递增数列 $\{s_1<\cdots<s_k<\cdots\}$,$0\leqslant s_k\leqslant 1$,并且 $\lim\limits_{k\to\infty}s_k=1$. 命 $P_k=C(s_k)$,则有

$$\sum_{k=1}^{\infty}d(P_k,P_{k+1})\leqslant L.$$

这说明:点列 $\{P_k\}$ 随着 k 的增长,间距 $d(P_k,P_{k+1})$ 越来越小,即任给小正数 ε,存在充分大自然数 N,使得 $n>l>N$ 时,$d(P_n,P_l)\sum\limits_{k=l}^{n-1}d(P_k,k+1)<\varepsilon$,所以点列 $\{P_k\}$ 是 Cauchy 点列,根

据条件(1),它在 M 中有极限点,$\lim\limits_{k\to\infty}P_k=Q$,而且这个极限点与单调递增数列 $\{s_k\}$ 的选择无关. 事实上,任给两个单调递增数列 $\{s_k\}$ 和 $\{s'_k\}$,把它们合起来就得到更细密的单调递增数列 $\{s''_k\}$,这三个数列决定的 Cauchy 点列的极限点是相同的. 所以 $\lim\limits_{t\to 1}C(t)=Q$,这和 $\lim\limits_{t\to 1}C(t)$ 不存在的假设矛盾. 因此,测地线 $C(t)$ 可以无限延伸,即曲面 M 是测地完备的.

2)⇒3). 设 S 是曲面 M 的有界无穷子集. 因为曲面是测地完备的,任取一点 $P\in S$,点 P 与集 S 中其他点都可以用测地线相连接. 因为 S 有界,对于 $\forall Q\in S, d(P,Q)<\delta$,我们可以作一以 P 点为中心,δ 为半径的测地实圆盘 U,使得 $\bar{S}\subset U$. 注意 U 是紧致的,并且以有界集 S 的闭包 $\bar{S}\subset U$,则紧致集 U 的闭子集 $\bar{S}$ 也是紧致的.

3)⇒1). 设 $\{P_k\}$ 是曲面 M 中的 Cauchy 点列,它一定是有界点列. 根据条件 3),它的闭包是紧致的,即存在 $\{P_k\}$ 的子序列 $\{P_{n_k}\}$,使得 $k\to\infty$ 时,$P_{n_k}\to P_0\in M$. 因为 $\{P_k\}$ 是 Cauchy 点列,任给小正数 ε,存在充分大的自然数 N,使得 $n>l>N$ 时

$$|d(P_n,P_0)-d(P_l,P_0)|\leqslant d(P_n,P_l)<\varepsilon.$$

所以,数列 $\{d(P_k,P_0)\}$ 是 Cauchy 数列,它有极限,并且

$$\lim_{n\to\infty}d(P_n,P_0)=\lim_{k\to\infty}d(P_{n_k},P_0)=0.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0\in M$. 因此,度量空间 M 中任一 Cauchy 点列 $\{P_k\}$ 在 M 中有极限点,所以 M 是完备度量空间. 定理证毕.

定义 满足 Hopf-Rinow 定理中三个条件的一条的曲面,称为**完备曲面**.

如果曲面 M 是紧致的,则它的有界闭集一定也是紧致的,所以紧致曲面一定是完备曲面. 但是,反之则未必如此,即完备曲面不一定是紧致的. 例如平面或柱面. 因此,对于曲面的整体理论来说,把紧致曲面的几何性质推广到完备曲面是一个非常重要的研究课题,许多数学家从事这方面的研究,从而得到了许多著名的

成果.

历史附记

(1) 1901 年德国数学家 D. Hilbert 证明了:三维欧氏空间 E^3 中不存在完备的负常曲率曲面. 60 多年以后,1964 年俄罗斯数学家叶菲莫夫又进一步证明了:E^3 中不存在完备的负曲率的曲面. 1974 年美国数学家 T. K. Milnor 在 Adv. Math.,第 8 卷,473—543 页上给出了这个结果的一个清晰的证明. 但是,把以上结果推广到高维空间的问题至今尚未解决.

(2) 1959 年美国数学家 P. Hartman 和 L. Nirenberg 证明了:E^3 中高斯曲率恒等于零的完备曲面必定是平面或柱面.

(3) 定理:一个单连通的高斯曲率非正的完备曲面,通过指数映射微分同胚于它的切平面. 这个定理首先在 1881 年由 Von Mangoldt 所证明. 1898 年 J. Hadamard 给出了完整的证明. 1926 年 E. Cartan 把它推广到高维黎曼流形,并给出了完整的、精确的叙述.

3.5 负常高斯曲率的曲面

(1) 负常高斯曲率曲面的结构方程

设 M 是负常高斯曲率的曲面,它是一个虚球面. 适当伸缩它的半径,即改变它的第一基本形式 $\mathrm{I}=\dfrac{a^2}{v^2}(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$ 中的常数 a,我们总可以使它的高斯曲率 $K=-1$. 所以,下面我们只讨论 $K=-1$ 的常高斯曲率的曲面. 在这个曲面上没有脐点,不然的话,如果曲面 M 上有脐点,则在脐点处的两主曲率相等,因此在这一点的高斯曲率 $K>0$. 但是 M 是常曲率的曲面,所以它的高斯曲率处处大于零,于是得出矛盾. 因此,在负常高斯曲率的曲面上,我们总可以选曲率网作为坐标网.

设 M 是高斯曲率 $K=-1$ 的曲面. 我们选曲率网为坐标网,坐标参数为(u,v),取

$$e_1=\frac{r_u}{|r_u|}, e_2=\frac{r_v}{|r_v|}, e_3=e_1\times e_2$$

作为 M 的活动标架，于是 M 的第一和第二基本形式分别是

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}r\cdot\mathrm{d}r=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2$$

$$\mathrm{II}=-\mathrm{d}r\cdot\mathrm{d}e_3=\omega^1\cdot\omega_1^3+\omega^2\cdot\omega_2^3,$$

其中

$$\omega^1=\sqrt{r_u\cdot r_u}\,\mathrm{d}u=\sqrt{E}\,\mathrm{d}u, \omega^2=\sqrt{r_v\cdot r_v}\,\mathrm{d}v=\sqrt{G}\,\mathrm{d}v.$$

再设曲面 M 的主曲率分别为 k_1 和 k_2，则

$$\omega_1^3=k_1\omega^1=k_1\sqrt{E}\,\mathrm{d}u, \omega_2^3=k_2\omega^2=k_2\sqrt{G}\,\mathrm{d}v,$$

$$\omega_1^2=\left(\frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\right)\omega^1+\left(\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\right)\omega^2=-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\mathrm{d}u+\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\mathrm{d}v.$$

再计算曲面 M 的结构方程

$$\mathrm{d}\omega_1^3=\omega_1^2\wedge\omega_2^3, \mathrm{d}\omega_2^3=\omega_2^1\wedge\omega_1^3,$$

于是我们得到

$$(k_1\sqrt{E})_v=-k_2(\sqrt{E})_v, (k_2\sqrt{G})_u=k_1(\sqrt{G})_u,$$

或

$$\begin{cases}(k_1)_v\sqrt{E}+(k_1-k_2)(\sqrt{E})_v=0,\\(k_2)_u\sqrt{G}+(k_2-k_1)(\sqrt{G})_u=0.\end{cases}$$

由于 $k_1k_2=K=-1$，我们可以设

$$k_1=\tan\varphi, k_2=\cot\varphi, k_1-k_2=\frac{1}{\sin\varphi\cdot\cos\varphi},$$

则曲面 M 的结构方程可以简化为

$$\left(\frac{\sqrt{E}}{\cos\varphi}\right)_v=0, \left(\frac{\sqrt{G}}{\sin\varphi}\right)_u=0.$$

所以 $\frac{\sqrt{E}}{\cos\varphi}$ 是 u 的函数，$\frac{\sqrt{G}}{\cos\varphi}$ 是 v 的函数. 现在我们在 M 的坐标曲线上选新的参数 $\xi=\xi(u), \eta=\eta(v)$ 使得

$$\mathrm{d}\xi=\frac{\sqrt{E}}{\cos\varphi}\mathrm{d}u, \mathrm{d}\eta=\frac{\sqrt{G}}{\sin\varphi}\mathrm{d}v,$$

则对于曲面 M 的新的坐标参数(ξ,η)来说,上述结构方程一定得到满足. 但是 M 的坐标曲线并没有改变,ξ-曲线和 η-曲线仍然是 M 的曲率线. 现在曲面 M 的活动标架的相对分量将改写成

$$\omega^1=\sqrt{E}\mathrm{d}u=\cos\varphi\mathrm{d}\xi,\omega^2=\sqrt{G}\mathrm{d}v=\sin\varphi\mathrm{d}\eta,$$
$$\omega_1^2=\varphi_\eta\mathrm{d}\xi+\varphi_\xi\mathrm{d}\eta,$$
$$\omega_1^3=k_1\omega^1=\sin\varphi\mathrm{d}\xi,\omega_2^3=k_2\omega^2=-\cos\varphi\mathrm{d}\eta,$$

把这些式子代入曲面 M 的另一个结构方程

$$\mathrm{d}\omega_1^2=-K\omega^1\wedge\omega^2=\omega^1\wedge\omega^2,$$

则函数 φ 应满足下列偏微分方程

$$\varphi_{\xi\xi}-\varphi_{\eta\eta}=\sin\varphi\cos\varphi=\frac{1}{2}\sin 2\varphi,$$

再作参数变换

$$\xi=s+t,\eta=s-t,$$

同时命 $\alpha=2\varphi$,则 α 应满足下列偏微分方程

$$\alpha_{st}=\sin\alpha,$$

这个方程称为**Sine-Gorden 方程**. 以上分析表明,在高斯曲率 $K=-1$ 的曲面上,选取适当的坐标参数以后,它的结构方程就转化为上述 Sine-Gorden 方程;反之,给出 Sine-Gorden 方程的一个解 $\alpha(s,t)$,命 $\varphi(s,t)=\frac{1}{2}\alpha(s,t)$,再命

$$\varphi(\xi,\eta)=\varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)=\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right),$$

把它代入相对分量$\{\omega^i,\omega_i^j\}(i,j=1,2,3)$的公式以后,再把这些相对分量代入活动标架方程:

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\sum\limits_{i=1}^{3}\omega^i\boldsymbol{e}_i,\omega^3=0,\\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_i=\sum\limits_{j=1}^{3}\omega_i^j\boldsymbol{e}_j,(i=1,2,3),\end{cases}$$

由于结构方程(即 Sine-Gorden 方程)已经满足,所以这个方程是

完全可积的，于是通过解这个微分方程，我们得到一个高斯曲率 $K=-1$ 的曲面片：

$$M: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\xi,\eta).$$

因此，我们就在负高斯曲率 $K=-1$ 的曲面 M 与 Sine-Gorden 方程的解 $\alpha=2\varphi$ 之间建立了一一对应关系.

(2) 负常高斯曲率曲面的切比雪夫坐标网

设 M 是高斯曲率 $K=-1$ 的曲面. 考虑 M 上以 (ξ,η) 为参数的曲率线坐标网，则曲面 M 的第一和第二基本形式分别为

$$\mathrm{I}=\cos^2\varphi d\xi^2+\sin^2\varphi d\eta^2,$$

$$\mathrm{II}=(\sin\varphi\cdot\cos\varphi)(d\xi^2-d\eta^2).$$

再经过参数变换 $\xi=s+t,\eta=s-t$，上面两个式子改写为

$$\mathrm{I}=ds^2+2\cos\alpha dsdt+dt^2,$$

$$\mathrm{II}=2\sin\alpha dsdt,$$

其中 $\alpha(s,t)$ 是 Sine-Gorden 方程的解. 由于第二基本形式中，$L=N=0$，所以 M 的坐标曲线：s-曲线和 t-曲线都是曲面 M 上的渐近线. 换言之，M 上以 (s,t) 为坐标参数的坐标网是渐近网，并且容易证明：$\alpha=2\varphi$ 就是坐标曲线(也就是过 M 的每一点的两条渐近曲线)的夹角. 我们把高斯曲率 $K=-1$ 的曲面 M 上的上述坐标参数 (s,t) 称为 M 的**切比雪夫(Chebyshev)参数**，坐标曲线 s-曲线和 t-曲线构成的渐近网称为**切比雪夫坐标网**. 同时，我们还可以看到：切比雪夫参数 s 和 t 分别是坐标渐近曲线的弧长.

必须提醒的一点是：切比雪夫坐标网是局部的，它只存在于曲面片上. 不过，如果高斯曲率 $K=-1$ 的曲面是**完备的**，则这个曲面上的切比雪夫坐标网中的坐标渐近曲线是可以无限延伸的. 下面我们用反证法来证明这个事实. 如果过曲面 M 上一点 P 的坐标渐近曲线不能无限延伸. 设此曲线是 $\boldsymbol{c}(s)$，则存在正数 s_0，使得 $s<s_0$ 时，$\boldsymbol{c}(s)$ 有定义，但是 $\boldsymbol{c}(s_0)$ 不能定义. 由于曲面 M 是完备的，如果 $\boldsymbol{c}(s)(s<s_0)$ 有定义，则 $\lim\limits_{s\to s_0}\boldsymbol{c}(s)$ 是存在的，我们可以把这个极

限定义为 $\boldsymbol{c}(s_0)$，这事实与上述 $\boldsymbol{c}(s_0)$ 不存在的假设矛盾.

由于在高斯曲率 $K=-1$ 的曲面上局部地存在切比雪夫网，对于曲面 M 上的任一点，存在两个切于坐标曲线的渐近方向 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$. 如果曲面 M 是完备的，我们可以整体地在 M 上定义坐标系 f: $\mathbf{R}^2 \to M$ 如下：固定 M 上一点 P，于是局部地存在从 P 点出发，切于 $\boldsymbol{v}_1$ 的渐近曲线，也就是坐标曲线，这条渐近曲线是可以无限延伸的. 给出 $(s_0, t_0) \in \mathbf{R}^2$，从 P 点出发，作切于渐近方向 $\boldsymbol{v}_1$ 的渐近曲线 $\boldsymbol{c}(s)$，其中参数 s 是弧长，在曲线 $\boldsymbol{c}(s)$ 上取一点 $\boldsymbol{c}(s_0)$；然后再从点 $\boldsymbol{c}(s_0)$ 出发，作切于渐近方向 $\boldsymbol{v}_2$ 的渐近曲线 $\boldsymbol{d}_{s_0}(t)$，其中参数 t 是弧长，在曲线 $\boldsymbol{d}_{s_0}(t)$ 上取一点 $\boldsymbol{d}_{s_0}(t_0)$. 由于渐近曲线 $\boldsymbol{c}(s)$ 和 $\boldsymbol{d}_{s_0}(t)$ 都是可以无限延伸的，我们就在完备曲面 M 上整体地定义了一个坐标系如下：

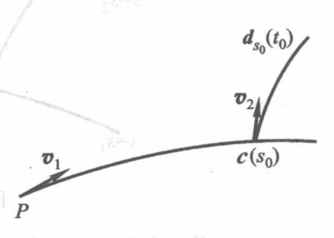


图 4－35

$$f: \mathbf{R}^2 \to M, \quad f(s_0, t_0) = \boldsymbol{d}_{s_0}(t_0).$$

M. P. do Carmo 严格地证明了："高斯曲率 $K=-1$ 的完备曲面上用以上办法整体地定义的坐标系的坐标网就是这个曲面的切比雪夫坐标网."（见 M. P. do Carmo: Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976).

有了 do Carmo 的这个结果，我们就可以证明著名的 Hilbert 定理："在三维欧几里得空间 $\boldsymbol{E}^3$ 中，不存在负常高斯曲率的完备曲面". 要证明这个定理，我们先证明：

引理 高斯曲率 $K=-1$ 的曲面 M 上，由切比雪夫坐标网中两条 s-曲线和两条 t-曲线所围成的四边形的面积小于 2π.

证明 设 M 上的切比雪夫参数为 (s,t)，考虑下面四条坐标曲线：

$$s=s_1, s=s_2; t=t_1, t=t_2,$$

其中 $s_1 < s_2$, $t_1 < t_2$. 它们围成的四边形是

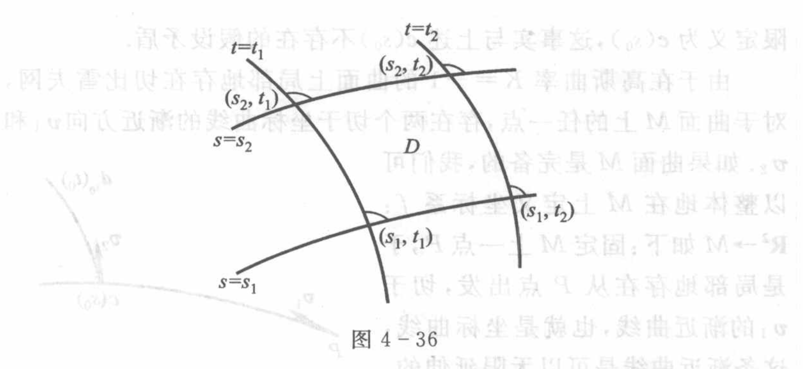


图 4-36

$$D=\{f(s,t)\in M: s\in[s_1,s_2], t\in[t_1,t_2]\},$$

$$D\text{ 的面积 }A(D)=\int_D \mathrm{d}A=\int_D \sin\alpha \mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t$$

$$=\int_D \alpha_{st}\mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{s_1}^{s_2}\alpha_{st}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t,$$

$$=\alpha(s_2,t_2)-\alpha(s_1,t_2)-\alpha(s_2,t_1)+\alpha(s_1,t_1),$$

其中 $\alpha(s,t)$ 是坐标曲线：s-曲线和 t-曲线的夹角. 设四边形 D 的四个内角依次为 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$，则

$$A(D)=\beta_1-(\pi-\beta_2)-(\pi-\beta_3)+\beta_4,$$

因为 $\beta_i<\pi(i=1,2,3,4)$，所以四边形 D 的面积

$$A(D)<2\pi.$$

推论(D. Hilbert，1901)　在 $\boldsymbol{E}^3$ 中不存在负常高斯曲率的完备曲面.

证明　我们不妨假定完备曲面的高斯曲率 $K=-1$. 根据 do Carmo 的结果，在 M 上整体地存在切比雪夫坐标网. 再根据上述引理，M 上任意两条 s-坐标曲线和 t-坐标曲线所围成的四边形的面积 $<2\pi$，所以整个曲面 M 的面积是有限的，最多等于 2π. 但是 $\boldsymbol{E}^3$ 中完备的负高斯曲率的曲面(见 §3.4 最后的历史附记的 Von Mangoldt 定理)，它的面积是无限的，于是得出矛盾.

(3) 伪球线汇和 Bäcklund 变换

在第二章 §4.3 中，我们定义了线汇，即双参直线族

$$l: \quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u,v)+\lambda \boldsymbol{b}(u,v),$$

其中$|\boldsymbol{b}|=1$. 我们已经指出:线汇中存在两族可展曲面,每一族中可展曲面的腰曲线生成一个曲面,称为**焦曲面**. 所以,每一个线汇中存在两个焦曲面Σ和$\overline{\Sigma}$,而且线汇中每一条直线l正好是这两个焦曲面的公切线. 因此,存在映射

$$l:\Sigma \to \overline{\Sigma},$$

公切线l使其中一个焦曲面Σ上的切点对应另一个焦曲面$\overline{\Sigma}$上的切点$\overline{P}$.

定义 线汇l称为**伪球线汇**,如果上述映射$l:\Sigma\to\overline{\Sigma}$具有以下性质:对于$\forall P\in\Sigma$,映射$l$满足:

(1) $|P-l(P)|=$与P无关的常数r,

(2) Σ和$\overline{\Sigma}$在对应点P和$l(P)$处的法向量$\boldsymbol{e}_1$和$\overline{\boldsymbol{e}}_1$的夹角为常数$\tau$.

顾名思义,伪球线汇是与伪球面(即负常高斯曲率的曲面)有关的. 下面的定理说明了这一点:

定理(Bäcklund,1880) 伪球线汇的两个焦曲面Σ和$\overline{\Sigma}$有相同的负常高斯曲率$K=-\dfrac{\sin^2\tau}{r^2}$.

证明 在曲面Σ上取活动标架$\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$,使得$\boldsymbol{e}_1$是$\Sigma$和$\overline{\Sigma}$的公切线的方向,$\boldsymbol{e}_3$是$\Sigma$的法向,则$\overline{\Sigma}$上对应的活动标架是

$$\begin{cases}\overline{\boldsymbol{r}}=l(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}+r\boldsymbol{e}_1,\\ \overline{\boldsymbol{e}}_1=\boldsymbol{e}_1,\\ \overline{\boldsymbol{e}}_2=\cos\tau\boldsymbol{e}_2+\sin\tau\boldsymbol{e}_3,\\ \overline{\boldsymbol{e}}_3=-\sin\tau\boldsymbol{e}_2+\cos\tau\boldsymbol{e}_3.\end{cases}$$

设Σ和$\overline{\Sigma}$的活动标架的相对分量分别是$\{\omega^i,\omega_i^j\}$和$\{\overline{\omega}^i,\overline{\omega}_i^j\}(i,j=1,2,3)$,所以

$$\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{r}}=\overline{\omega}_1\overline{\boldsymbol{e}}_1+\overline{\omega}_2\overline{\boldsymbol{e}}_2,$$

但是另一方面

$$d\bar{r}=dr+rde_1=(\omega^1 e_1+\omega^2 e_2)+r(\omega_1^2 e_2+\omega_1^3 e_3),$$

于是我们得到以下关系式

$$\bar{\omega}^1=\omega^1,$$

$$\bar{\omega}^2\cos\tau=\omega^2+r\omega_1^2,$$

$$\bar{\omega}^2\sin\tau=r\omega_1^3.$$

因此,焦曲面Σ的活动标架的相对分量必须满足关系式

$$\omega^2+r\omega_1^2=r\cot\tau\cdot\omega_1^3. \qquad (*)$$

现在我们来计算焦曲面Σ和$\bar{\Sigma}$的高斯曲率

$$\omega_1^3\wedge\omega_2^3=K\omega^1\wedge\omega^2,\bar{\omega}_1^3\wedge\bar{\omega}_2^3=\bar{K}\bar{\omega}^1\wedge\bar{\omega}^2,$$

设

$$\omega_1^3=a\omega^1+b\omega^2,\omega_2^3=b\omega^1+c\omega^2,$$

则有

$$\bar{\omega}^1\wedge\bar{\omega}^2=\frac{r}{\sin\tau}\omega^1\wedge\omega_1^3=\frac{br}{\sin\tau}\omega^1\wedge\omega^2,$$

根据(*)式

$$\bar{\omega}_1^3=(d\bar{e}_1,\bar{e}_3)=-\sin\tau\,\omega_1^2+\cos\tau\cdot\omega_1^3$$

$$=-\sin\tau\,\omega_1^2+\frac{\cos\tau}{r}\cdot\tan\tau\cdot(\omega^2+r\omega_1^2)$$

$$=\frac{1}{r}\sin\tau\omega^2,$$

$$\bar{\omega}_2^3=(d\bar{e}_2,\bar{e}_3)=\omega_2^3,$$

$$\bar{\omega}_1^3\wedge\bar{\omega}_2^3=\frac{1}{r}\sin\tau\omega^2\wedge\omega_2^3=-\frac{b}{r}\sin\tau\,\omega^1\wedge\omega^2.$$

所以焦曲面$\bar{\Sigma}$的高斯曲率是

$$\bar{K}=\frac{\bar{\omega}_1^3\wedge\bar{\omega}_2^3}{\bar{\omega}^1\wedge\bar{\omega}^2}=-\frac{\sin^2\tau}{r^2}.$$

交换焦曲面Σ和$\bar{\Sigma}$,用同样的方法可以证明:

$$K=-\frac{\sin^2\tau}{r^2},$$

定理证毕.

根据 Bäcklund 定理,一个伪球线汇的两个焦曲面具有相同的负常高斯曲率 $K=-\frac{\sin^2\tau}{r^2}$,因此,它们的结构方程是相同的,都是 Sine-Gorden 方程;反过来,Sine-Gorden 方程的两个解 α 和 $\bar{\alpha}$ 又分别确定了两个具有相同常高斯曲率 $K=-1$ 的曲面(注意:调整长度 r 可以使 $r=\sin\tau$). 这就给出了一个研究 Sine-Gorden 方程的解的途径. 给出了 Sine-Gorden 方程的一个解 α,我们可以寻找一个途径得到 Sine-Gorden 方程的另一个解 $\bar{\alpha}$,这就是 **Bäcklund 变换**.



下列一系列习题把等宽曲线概念推广到曲面上. 设 M 是卵形面:

1. 如果点 $P\in M$,求证存在 M 上惟一一点 $\bar{P}=P$,使得 P 和 $\bar{P}$ 的切平面互相平行.

2. M 上具有第一题所述性质的一对点 P 与 $\bar{P}$,在此两点处的切平面之间的距离设为 d. 若当 P 遍取 M 上所有点,d 值为常数,则此曲面称为等宽**曲面**. P 与 $\bar{P}$ 称为相对点. 试证等宽曲面 M 上相对点的连线是 P 点(或 $\bar{P}$ 点)的法线.

3. 证明等宽曲面 M 上相对点处的主方向互相平行.

4. 设 P 和 $\bar{P}$ 是等宽曲面 M 上的一对相对点,$\boldsymbol{r}_1$ 是 P 点的主方向,对应的主曲率是 k_1,$\bar{\boldsymbol{r}}$ 是 $\bar{P}$ 点的主方向,对应的主曲率是 $\bar{k}_1$,求证 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{\bar{k}_1}$ 是与 P 点无关的常数.

5. 对于等宽曲面 M,证明

$$\int_M H\mathrm{d}A=2\pi d,$$

其中 d 是相对点处切平面间的距离.

§4 完备曲面的比较定理

4.1 完备曲面上的极坐标系

给出一个完备曲面

M:　　　　$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 或 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$

P 是 M 上固定一点，T_PM 是 M 在 P 点的切平面. 对于 $\forall \boldsymbol{v}\in T_PM$，存在唯一的一条从 P 点出发，切于 $\boldsymbol{v}$ 的测地线. 由于 M 是完备的，这条测地线是可以无限地延伸的. 我们在 M 上引进一个坐标系：它的 u-曲线（$v=$常数）是所有从 P 点出发的测地射线，它的 v-曲线（$u=$常数）是这一族测地线的正交轨线.（即：命第一基本形式的系数 $F=0$）. M 上的这个坐标系称为：以 P 点为原点的**极坐标系**. 对于 M 上的这个坐标系，我们把参数 (u,v) 改写成 (r,θ)，然后再选 r 为测地射线（$\theta=$常数）的弧长，于是曲面 M 的度量（即第一基本形式）就简化为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+G(r,\theta)\mathrm{d}\theta^2,$$

由于度量必须是正定的，所以我们总假定 $G(r,\theta)>0$.

引理　对于曲面 M 的极坐标系来说：

$$\sqrt{G}(0,\theta)=0,(\sqrt{G})_r(0,\theta)=1.$$

证明　在极坐标系的原点 P 的附近，曲面 M 的度量趋近于曲面在 P 点的切平面 T_PM 上的欧氏度量，即

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2,$$

所以，$r\to 0$ 时

$$\sqrt{G}(0,\theta)=\lim_{r\to 0}\sqrt{G}(r,\theta)=\lim_{r\to 0}(r)=0,$$

$$(\sqrt{G})_r(0,\theta)=\lim_{r\to 0}(\sqrt{G})_r(r,\theta)=\lim_{r\to 0}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r}\right)=1.$$

对于 M 上的极坐标系来说，曲面的 Christoffel 系数和高斯曲率分别为

$$\Gamma_{11}^1=0,\Gamma_{12}^1=0,\Gamma_{22}^1=-\frac{Gu}{2},$$

$$\Gamma_{11}^2=0,\Gamma_{12}^2=\frac{Gu}{2G},\Gamma_{22}^2=\frac{Gv}{2G}.$$

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{uu}=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}.$$

定理 给出一个完备曲面 M,它的高斯曲率＝常数 k,则它的度量在极坐标系下的表示式是

$$ds^2=dr^2+Sn_k^2(r)d\theta^2,$$

其中

$$Sn_k(r)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}r), & k>0,\\ r, & k=0,\\ \frac{1}{\sqrt{-k}}\sin h(\sqrt{-k}r), & k<0.\end{cases}$$

证明 根据引理中的初始条件,解常微分方程

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}+k\sqrt{G}=0,$$

就可以直接得到以上结果.

给出曲面 M 上的一条测地线

σ: $r=r(s),\theta=\theta(s)$ 或 $u^i=u^i(s)$ $(i=1,2)$,

其中参数 s 是弧长. 它满足测地线方程

$$\frac{d^2u^i}{ds^2}+\sum_{j,k=1}^{2}\Gamma_{jk}^i\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}=0\qquad(i=1,2),$$

其中,第一个方程可以简写为

$$\frac{d^2r}{ds^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2=0\quad 或\quad \frac{d^2r}{ds^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.$$

注意:测地线 σ 的单位切向量是

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{dr}{ds}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial r}+\frac{d\theta}{ds}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta},$$

极坐标网是正交的，所以$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \perp \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}$，

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r},$$

这说明：$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$是测地线 σ 的单位切向量$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$在单位径矢$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}$上的投影，即单位切向量与径矢的夹角的余弦 $\cos \alpha$.

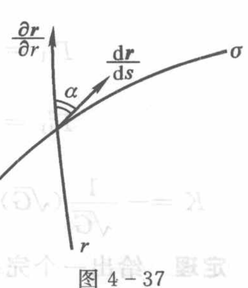


图 4－37

4.2 比较定理

定理 给出常数 k 和可微函数$\lambda(r)$，满足下列微分不等式

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}r} + \lambda^2 \leqslant -k \left(或 \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}r} + \lambda^2 \geqslant -k \right),$$

而且函数 $\lambda(r)$满足下列初始条件：

$$r \to 0 时，\quad \lambda(r) = \frac{1}{r} + O(r),$$

则函数 $\lambda(r)$一定满足下列不等式

$$\lambda(r) \leqslant \frac{Sn_k{}'(r)}{Sn_k(r)} \left(或 \lambda(r) \geqslant \frac{Sn'_k(r)}{Sn_k(r)} \right).$$

证明 把上述不等式改写成

$$\frac{-\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2 + k} \geqslant \mathrm{d}r \left(或 \frac{-\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2 + k} \leqslant \mathrm{d}r \right),$$

两边积分后，得到

$$\int_0^r \frac{-\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2 + (\sqrt{k})^2} \geqslant r (或 \int_0^r \frac{-\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2 + (\sqrt{k})^2} \leqslant r).$$

(1) $k=0$ 的情形：根据给定的初始条件

$$\frac{1}{\lambda(0)} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(r)} = \lim_{r \to 0}(r) = 0.$$

$$\int_0^r \frac{-\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda(r)} \bigg|_0^r = \frac{1}{\lambda(r)} \geqslant r \left(或 \int_0^r \frac{-\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2} \leqslant r \right),$$

$$\lambda(r)\leqslant\frac{1}{r}=\frac{Sn'_k(r)}{Sn_k(r)}(k=0)$$

$$\left(或\ \lambda(r)\geqslant\frac{1}{r}=\frac{Sn'_k(r)}{Sn_k(r)}(k=0)\right).$$

(2) $k>0$ 的情形:根据给定的初始条件

$$\operatorname{arccot}\left(\frac{\lambda(0)}{\sqrt{k}}\right)=\lim_{r\to0}\operatorname{arccot}\left(\frac{\lambda(0)}{\sqrt{k}}\right)=\lim_{r\to0}\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{\sqrt{k}r}\right)$$

$$=\lim_{r\to0}\arctan(\sqrt{k}r)=0,$$

$$\int_0^r\frac{-\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2+(\sqrt{k})^2}=\frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{arccot}\left(\frac{\lambda(r)}{\sqrt{k}}\right)\Bigg|_0^r=\frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{arccot}\left(\frac{\lambda(r)}{\sqrt{k}}\right)\geqslant r$$

$$\left(或\int_0^r\frac{-\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2+(\sqrt{k})^2}=\frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{arccot}\left(\frac{\lambda(r)}{\sqrt{k}}\right)\leqslant r\right),$$

所以

$$\lambda(r)\leqslant\sqrt{k}\cot(\sqrt{k}r)=\frac{\sqrt{k}\cos(\sqrt{k}r)}{\sin(\sqrt{k}r)}=\frac{Sn'_k(r)}{Sn_k(r)}(k>0)$$

$$\left(或\ \lambda(r)\geqslant\sqrt{k}\cot(\sqrt{k}r)=\frac{Sn'_k(r)}{Sn_k(r)}(k>0)\right).$$

(3) $k<0$ 的情形:把上述积分改写为

$$\int_0^r\frac{-\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2-(\sqrt{-k})^2}\geqslant r\left(或\int_0^r\frac{-\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2-(\sqrt{-k})^2}\leqslant r\right),$$

积分后得到

$$\ln\left[\frac{\lambda+\sqrt{-k}}{\lambda-\sqrt{-k}}\right]\Bigg|_0^r\geqslant2\sqrt{-k}r\left(或\ \ln\left[\frac{\lambda+\sqrt{-k}}{\lambda-\sqrt{-k}}\right]\Bigg|_0^r\leqslant2\sqrt{-k}r\right),$$

根据给定的初始条件:

$$\ln\left[\frac{\lambda(0)+\sqrt{-k}}{\lambda(0)-\sqrt{-k}}\right]=\lim_{r\to0}\ln\left[\frac{\lambda(r)+\sqrt{-k}}{\lambda(r)-\sqrt{-k}}\right]$$

$$=\lim_{r\to0}\ln\left[\frac{1/r+\sqrt{-k}}{1/r-\sqrt{-k}}\right]$$

$$=\lim_{r\to 0}\ln\left[\frac{1+\sqrt{-k}r}{1-\sqrt{-k}r}\right]=\ln(1)=0,$$

所以

$$\ln\left[\frac{\lambda+\sqrt{-k}}{\lambda-\sqrt{-k}}\right]\geqslant 2\sqrt{-k}r,\frac{\lambda+\sqrt{-k}}{\lambda-\sqrt{-k}}\geqslant e^{2\sqrt{-k}r},$$

$$\lambda(r)\leqslant\frac{e^{2\sqrt{-k}r}+1}{e^{2\sqrt{-k}r}-1}=\sqrt{-k}\frac{\cos h(\sqrt{-k}r)}{\sin h(\sqrt{-k}r)}=\frac{Sn'_k(r)}{Sn_k(r)}(k<0)$$

$$\left(\text{或 }\lambda(r)\geqslant\frac{e^{2\sqrt{-k}r}+1}{e^{2\sqrt{-k}r}-1}=\frac{Sn'_k(r)}{Sn_k(r)}(k<0)\right).$$

证毕.

推论 设完备曲面 M 的高斯曲率 $K\geqslant$ 常数 k(或 $K\leqslant k$),则有不等式

$$\frac{1}{2G}\left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)=\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\right)\leqslant\frac{Sn'_k(r)}{Sn_k(r)}$$

$$\left[\text{或}\frac{1}{2G}\left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\geqslant\frac{Sn'_k(r)}{Sn_k(r)}\right].$$

证明 命 $\lambda(r)=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}$,则

$$\frac{d\lambda}{dr}+\lambda^2=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}=-K\leqslant -k\left(\text{或}\frac{d\lambda}{dr}+\lambda^2=-K\geqslant -k\right),$$

根据第 1 小节的引理,$r\to 0$ 时,$\sqrt{G}\to r$,$(\sqrt{G})_r\to 1$,所以

$$\lim_{r\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\right]\longrightarrow\frac{1}{r},$$

因此,函数 $\lambda(r)$ 满足上述定理对初始条件的要求,根据定理就可以直接推出所求的不等式. 证毕.

定理(比较定理) 给出常数 k 和两个可微函数 $\varphi(t)$ 和 $\overline{\varphi}(t)$,它们分别满足下列微分不等式和微分方程:

$$\varphi''(t)+k\varphi(t)\geqslant 0(\text{或 }\varphi''(t)+k\varphi(t)\leqslant 0),$$

$$\bar{\varphi}''(t) + k\bar{\varphi}(t) = 0,$$

而且这两个函数满足相同的初始条件：

$$\varphi(0) = \bar{\varphi}(0), \varphi'(0) = \bar{\varphi}'(0),$$

则下列不等式成立：

$$\varphi(t) \geqslant \bar{\varphi}(t)(\text{或 } \varphi(t) \leqslant \bar{\varphi}(t)).$$

证明　命 $f(t)=\varphi'(t)\bar{\varphi}(t)-\varphi(t)\bar{\varphi}'(t)$，微分后得到

$$f'(t) = \varphi''(t)\bar{\varphi}(t) - \varphi(t)\bar{\varphi}''(t) \geqslant -k\varphi(t)\bar{\varphi}(t) + k\varphi(t)\bar{\varphi}(t) = 0$$

$$(\text{或 } f'(t) \leqslant 0),$$

但是，$f(0)=\varphi'(0)\bar{\varphi}(0)-\varphi(0)\bar{\varphi}'(t)=0$，所以

$$f(t) \geqslant 0(\text{或 } f(t) \leqslant 0),$$

再命 $g(t)=\varphi(t)/\bar{\varphi}(t)(\bar{\varphi}(t)\neq 0)$，则有

$$g'(t) = \frac{\bar{\varphi}\cdot\varphi' - \varphi\cdot\bar{\varphi}'}{\bar{\varphi}^2} = \frac{f}{\bar{\varphi}^2} \geqslant 0(\text{或 } g'(t) \leqslant 0),$$

由于 $g(0)=\varphi(0)/\bar{\varphi}(0)=1$，所以

$$g(t) = \frac{\varphi(t)}{\bar{\varphi}(t)} \geqslant 1\left(\text{或 } g(t) = \frac{\varphi(t)}{\bar{\varphi}(t)} \leqslant 1\right),$$

定理证毕.

附记：比较定理的关键是：假定比较函数 $\bar{\varphi}(t)\neq 0$. 不过，如果 $\bar{\varphi}(t)$在定义域内只有个别零点，我们可以用微扰的方法去消除它们（参阅 P. Peterson: Riemannian geometry, 1998, Springer-Verlag, p. 324).

考虑差函数 $f(t)=\varphi(t)-\bar{\varphi}(t)$，它满足微分不等式

$$f''(t) + kf(t) \geqslant 0(\text{或 } f''(t) + kf(t) \leqslant 0),$$

满足初始条件：$f(0)=\varphi(0)-\bar{\varphi}(0)=0, f'(0)=\varphi'(0)-\bar{\varphi}'(0)=0$.

我们只考虑 $k>0$ 的情形. 把函数 $f(t)$稍加变化变成 $\tilde{f}(t)$，使得初始条件稍加变化：

$$\tilde{f}(0) = \varepsilon > 0, \tilde{f}'(0) = \delta > 0,$$

再把比较函数 $\bar{f}(t)$所满足的微分方程也稍加变更

$$\bar{f}''(t)+\bar{k}\bar{f}(t)=0, \qquad \bar{k}>k>0.$$

这个微分方程的解是

$$\begin{aligned}\bar{f}(t)&=\varepsilon\cos(\sqrt{\bar{k}}t)+\frac{\delta}{\sqrt{\bar{k}}}\sin(\sqrt{\bar{k}}t)\\&=\sqrt{\varepsilon^2+\frac{\delta^2}{\bar{k}}}\sin\left(\sqrt{\bar{k}}t+\arctan\left(\frac{\varepsilon\sqrt{\bar{k}}}{\delta}\right)\right),\end{aligned}$$

于是,当

$$t<\frac{\pi-\arctan\left(\frac{\varepsilon\sqrt{\bar{k}}}{\delta}\right)}{\sqrt{\bar{k}}}$$

时,我们有 $\bar{f}(t)>0$,用它做比较函数,可以满足 $\bar{f}(t)\neq 0$ 的要求.

现在,命 $\bar{k}\to k$,则可以使函数 $\bar{f}(t)$ 和 $\tilde{f}(t)$ 相比较,当

$$t<\frac{\pi-\arctan\left(\frac{\varepsilon\sqrt{k}}{\delta}\right)}{\sqrt{k}}$$

时,$\tilde{f}(t)\geqslant\bar{f}(t)$(或 $\tilde{f}(t)\leqslant f(t)$).

再命 $\varepsilon\to 0$,则 $t\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{k}}$时,

$$\tilde{f}(t)\geqslant\bar{f}(t)\quad(\text{或 }\tilde{f}(t)\leqslant f(t)).$$

最后,再使 $\delta\to 0$,则 $\tilde{f}(t)\to f(t)$,$\bar{f}(t)\to 0$,我们最后得到

$$f(t)=\varphi(t)-\bar{\varphi}(t)\geqslant 0(\text{或 }f(t)=\varphi(t)-\bar{\varphi}(t)\leqslant 0),$$

即 $\varphi(t)\geqslant\bar{\varphi}(t)$(或 $\varphi(t)\leqslant\bar{\varphi}(t)$).

4.3 完备曲面上的比较定理

设 M 是一个完备曲面,它的高斯曲率 $K=$常数 k. 在 M 上取一个测地三角形$\triangle PQR$,它的三条边都是最短的测地线. 命

$d(PQ)=b$,$d(QR)=c$,$\angle PQR=A$,再设 $d(PR)=a$,则有

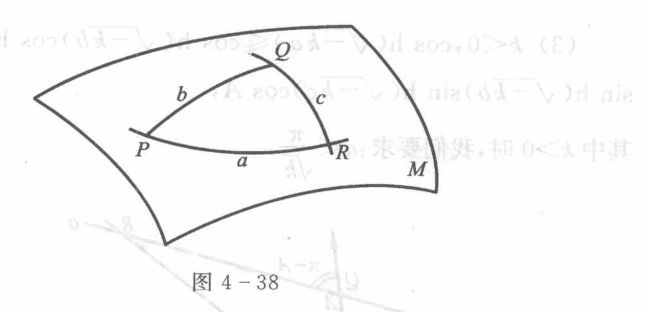


图 4 - 38

命题（常高斯曲率的完备曲面的余弦定律）

（1） $k=0, a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

（2） $k>0, \cos(\sqrt{k}a)=\cos(\sqrt{k}b)\cos(\sqrt{k}c)+\sin(\sqrt{k}b)\sin(\sqrt{k}c)\cos A$,

（3） $k<0, \cosh(\sqrt{-k}a)=\cosh(\sqrt{-k}b)\cosh(\sqrt{-k}c)-\sinh(\sqrt{-k}b)\sinh(\sqrt{-k}c)\cos A$.

其中，$k=0$ 时，M 是平面 $\mathbf{R}^2$；$k>0$ 时，M 是半径为 $\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ 的球面；$k<0$ 时，M 是半径为 $\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ 的虚球面.

证明 可以查阅：周建伟《解析几何》，高等教育出版社，§3.5 和 §6.3.

现在，我们要利用 §4.2 中的比较定理，把以上这些余弦定律推广到一般的完备曲面.

定理（完备曲面上的余弦定律） 设 M 是完备曲面，它的高斯曲率 $K\geqslant$ 常数 k，$\triangle PQR$ 是 M 上的测地三角形，

$$d(PQ)=b, d(QR)=c, \angle PQR=A,$$

再设 $d(PR)=a$，则有下列不等式：

（1） $k=0, a^2\leqslant b^2+c^2-2bc\cos A$,

（2） $k>0, \cos(\sqrt{k}a)\geqslant\cos(\sqrt{k}b)\cos(\sqrt{k}c)+\sin(\sqrt{k}b)\sin(\sqrt{k}c)\cos A$,

(3) $k<0$, $\cos h(\sqrt{-k}a)\leqslant\cos h(\sqrt{-k}b)\cos h(\sqrt{-k}c)-\sin h(\sqrt{-k}b)\sin h(\sqrt{-k}c)\cos A$,

其中 $k>0$ 时，我们要求：$a<\dfrac{\pi}{\sqrt{k}}$.

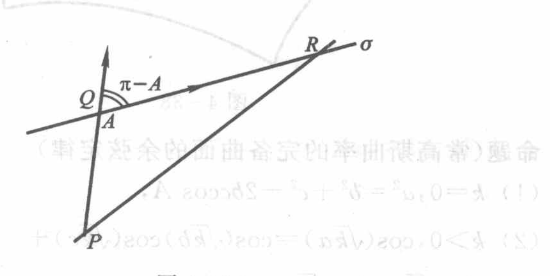


图 4-39

证明 在曲面 M 上，取以 P 点为原点的极坐标系. 再命 σ 是从 Q 点出发通过 R 点的测地线，以弧长 s 为参数.

σ: $\quad r=r(s),\theta=\theta(s)$

则有：$r(0)=d(PQ)=b, r(c)=d(PR)=a$.

(1) $k=0$ 的情形：考虑定义在 σ 上的函数

$$f(s)=(d(P,\sigma(s)))^2=(r(s))^2,$$

微分两次得到

$$f'(s)=2r(s)\cdot r'(s),$$

$$f''(s)=2(r'(s))^2+2r(s)\cdot r''(s),$$

根据 §4.1 中测地线 σ 的第一个方程和比较定理 1 的推论

$$r''(s)=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}s^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial r}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2\leqslant\frac{Sn_k'(r)}{Sn_k(r)}\bigg|_{k=0}\cdot G\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2=\frac{G}{r}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2,$$

$$f''(s)\leqslant2\left(\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2+G\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2\right)=2\,\frac{\mathrm{d}r^2+G\mathrm{d}\theta^2}{\mathrm{d}s^2}=2.$$

于是我们得到函数 $f(s)$ 所满足的微分不等式

$$f''(s)\leqslant2.$$

积分两次后，我们得到

$$f(s)\leqslant f(0)+f'(0)s+s^2,$$

其中

$$f(0)=(r(0))^2=b^2,f'(0)=2r(0)\cdot r'(0)$$
$$=2b\cos(\pi-A)=-2b\cos A.$$

注意，在§4.1末，我们已说明：$r'(0)$是测地线σ在Q点的切方向和径矢$\overrightarrow{PQ}$的夹角$\pi-A$的余弦.

所以

$$f(s)\leqslant b^2-2bs\cos A+s^2,$$

命$s=c,f(c)=(r(c))^2=a^2$，代入上式后就得到余弦定律(1).

(2) $k>0$的情形：设σ是完备曲面M上的测地线，考虑定义在σ上的函数

$$f(s)=\cos(\sqrt{k}d(P,\sigma(s)))=\cos(\sqrt{k}r(s)),$$

微分两次得到

$$f'(s)=-\sqrt{k}\sin(\sqrt{k}r(s))\cdot r'(s),$$

$$f''(s)=-k\cos(\sqrt{k}r(s))(r'(s))^2-\sqrt{k}\sin(\sqrt{k}r(s))\cdot r''(s),$$

根据测地线σ的第一个方程和比较定理的推论

$$r''(s)=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}s^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)^2\leqslant\frac{Sn'_k(r)}{Sn_k(r)}\bigg|_{k>0}\cdot G\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2$$

$$=k\,\frac{\cos(\sqrt{k}r(s))}{\sin(\sqrt{k}r(s))}\cdot G\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2,$$

所以

$$f''(s)\geqslant-k\cos(\sqrt{k}r(s))\left(\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2+G\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2\right)$$

$$=-k\cos(\sqrt{k}r(s))=-kf(s).$$

于是，我们得到函数$f(s)$所满足的微分不等式

$$f''(s)+kf(s)\geqslant 0.$$

为了应用比较定理，我们把这个微分不等式和常高斯曲率$\overline{M}$上相应的微分方程相比较. 命$\overline{M}$是高斯曲率$K=$常数k的完备曲面. 在$\overline{M}$上作测地三角形$\triangle\overline{P}\overline{Q}\overline{R}$，使得

$$d(\overline{P}\overline{Q})=d(PQ)=b,d(\overline{Q}\overline{R})=d(QR)=c,\angle\overline{P}\overline{Q}\overline{R}=\angle PQR=A,$$

再设 $d(\overline{P}\overline{R})=\overline{a}$. 在 $\overline{M}$ 上取以 $\overline{P}$ 为原点的极坐标系，设 $\overline{\sigma}$ 是从 $\overline{Q}$ 点出发通过 $\overline{R}$ 点的测地线

$$\overline{\sigma}: \overline{r}=\overline{r}(s), \overline{\sigma}=\overline{\sigma}(s),$$

其中参数 s 是 $\overline{\sigma}$ 的弧长. 由于 $d(\overline{Q}\overline{R})=d(QR)$，所以 σ 和 $\overline{\sigma}$ 有相同的弧长参数 s. 注意：$\overline{r}(0)=d(\overline{P}\overline{Q})=b, \overline{r}(c)=d(\overline{P}\overline{R})=\overline{a}$.

考虑定义在测地线 $\overline{\sigma}$ 上的函数

$$\overline{f}(s)=\cos(\sqrt{k}d(\overline{P},\overline{\sigma}(s)))=\cos(\sqrt{k}\overline{r}(s)),$$

微分两次得到

$$\overline{f}'(s)=-\sqrt{k}\sin(\sqrt{k}\overline{r}(s))\cdot\overline{r}'(s),$$

$$f''(s)=-k\cos(\sqrt{k}\overline{r}(s))(\overline{r}'(s))^2-\sqrt{k}\sin(\sqrt{k}\overline{r}(s))\cdot\overline{r}''(s),$$

根据测地线 σ 的第一个方程和 § 4.1 的定理中 $\overline{M}$ 的度量的表示式 $\left(\sqrt{\overline{G}}=Sn_k(\overline{r})=\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}\overline{r})\right)$,

$$\overline{r}''(s)=\frac{\mathrm{d}^2\overline{r}}{\mathrm{d}s^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{G}}{\partial\overline{r}}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\theta}}{\mathrm{d}s}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{\overline{G}}}\frac{\partial\sqrt{\overline{G}}}{\partial\overline{r}}\cdot\overline{G}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\theta}}{\mathrm{d}s}\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{k}\cos(\sqrt{k}\overline{r})}{\sin(\sqrt{k}\overline{r})}\cdot\overline{G}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\theta}}{\mathrm{d}s}\right)^2,$$

$$\overline{f}''(s)=-k\cos(\sqrt{k}\overline{r}(s))\left(\frac{\mathrm{d}\overline{r}}{\mathrm{d}s}\right)^2-k\cos(\sqrt{k}\overline{r}(s))\cdot\overline{G}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\theta}}{\mathrm{d}s}\right)^2$$

$$=-k\cos(\sqrt{k}\overline{r}(s))\left(\left(\frac{\mathrm{d}\overline{r}}{\mathrm{d}s}\right)^2+\overline{G}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\theta}}{\mathrm{d}s}\right)^2\right)=-k\cos(\sqrt{k}\overline{r}(s))$$

$$=-k\,\overline{f}(s),$$

于是我们得到函数 $\overline{f}(s)$ 所满足的微分方程

$$\overline{f}''(s)+k\,\overline{f}(s)=0.$$

把函数 $f(s)$ 的微分不等式和函数 $\overline{f}(s)$ 的微分方程相比较，由于它们的初始条件相同

$f(0)=\bar{f}(0)=\cos(\sqrt{k}b)$, $f'(0)=\bar{f}'(0)=-\sqrt{k}\sin(\sqrt{k}b)\cos A$,
根据比较定理,我们得到下列不等式

$$f(s)\geqslant\bar{f}(s).$$

注意:比较函数 $\bar{f}(s)=\cos(\sqrt{k}\bar{r}(s))$,当 $\bar{r}(s)=\frac{\pi}{2\sqrt{k}}$时为零.但是比较定理要求 $\bar{f}(s)\neq 0$. 这个缺陷可以通过变动 $\bar{f}(s)$的方法去消除详见 §4.2 最后的附记. 不过,我们还须要求 $\bar{r}(s)<\frac{\pi}{\sqrt{k}}$.所以,我们在定理的最后,对于 $k>0$ 的情形,添加了 $a<\frac{\pi}{\sqrt{k}}$的条件.

命 $s=c$, $f(c)=\cos(\sqrt{k}r(c))=\cos(\sqrt{k}a)$, $\bar{f}(c)=\cos(\sqrt{k}\bar{r}(c))$
$=\cos(\sqrt{k}\bar{a})$,

所以

$$\cos(\sqrt{k}a)\geqslant\cos(\sqrt{k}\bar{a}),$$

再根据上面命题中的余弦定律(2),代入上式后,我们就得到定理中的不等式(2),即

$$\cos(\sqrt{k}a)\geqslant\cos(\sqrt{k}\bar{a})=\cos(\sqrt{k}b)\cos(\sqrt{k}c)+\sin(\sqrt{k}b)\sin(\sqrt{k}c)\cos A.$$

(3) $k<0$ 的情形:对于这个情形,我们把完备曲面 M 和半径为$\frac{1}{\sqrt{k}}$的虚球面 $\overline{M}$ 相比较. 分别在 M 上的测地线 σ 和 $\overline{M}$ 的测地线 $\bar{\sigma}$ 上定义函数 $f(s)$和 $\bar{f}(s)$如下:

$$f(s)=\cosh(\sqrt{-k}d(P,\sigma(s))=\cosh(\sqrt{-k}r(s)),$$

$$\bar{f}(s)=\cosh(\sqrt{-k}d(\bar{P},\bar{\sigma}(s))=\cosh(\sqrt{-k}\bar{r}(s)),$$

分别微分两次,再根据测地线 σ 和测地线 $\bar{\sigma}$ 的第一个方程,再利用比较定理的推论和 §4.1 的定理中虚球面 $\overline{M}$ 的度量,就可以得到函数 $f(s)$所满足的微分不等式和函数 $\bar{f}(s)$所满足的微分方程.

由于函数 $f(s)$ 和 $\bar{f}(s)$ 的初始条件相同，应用比较定理（注意 $\bar{f}\neq 0$），我们就可以得到不等式

$$f(s)\leqslant f(\bar{s}).$$

命 $s=c$，$f(c)=\cosh(\sqrt{-k}\,r(c))=\cosh(\sqrt{-k}\,a)$，$\bar{f}(c)=\cosh(\sqrt{-k}\,\bar{r}(c))=\cosh(\sqrt{-k}\,\bar{a})$，再利用上述命题中的余弦定律(3)，我们就得到所求的不等式

$$\cosh(\sqrt{-k}a)\leqslant\cosh(\sqrt{-k}\bar{a})$$
$$=\cosh(\sqrt{-k}b)\cosh(\sqrt{-k}c)-\sinh(\sqrt{-k}b)\sinh(\sqrt{-k}c)\cos A,$$

定理证毕.

推论（Toponogov 定理，1959） 设 M 是完备曲面，它的高斯曲率 $\geqslant$ 常数 k. $\triangle PQR$ 是 M 上的测地三角形，$d(PQ)=b$，$d(QR)=c$. 在 $K=k$ 的常高斯曲完备曲面 $\overline{M}$ 上作相应的测地三角形 $\triangle\overline{P}\overline{Q}\overline{R}$，使得 $d(\overline{P}\overline{Q})=d(PQ)=b$，$d(\overline{Q}\overline{R})=d(QR)=c$，则有：

(1) 如果 $\angle\overline{P}\overline{Q}\overline{R}=\angle PQR=A$，则 $d(PR)\leqslant d(\overline{P}\overline{Q})$，

(2) 如果 $d(\overline{P}\overline{R})=d(PR)=a$，则 $\angle PQR\geqslant\angle\overline{P}\overline{Q}\overline{R}$.

证明 (1) 命 $d(PR)=a$，$d(\overline{P}\overline{R})=\bar{a}$，根据上述定理，对于 k 的不同情形，我们分别有不等式

$$a^2\leqslant\bar{a}^2,\cos(\sqrt{k}a)\geqslant\cos(\sqrt{k}\bar{a}),\cosh(\sqrt{-k}a)\leqslant\cosh(\sqrt{-k}\bar{a}),$$

其中 $k>0$ 时要求 $a\leqslant\dfrac{\pi}{\sqrt{k}}$. 所以不论是哪一种情况，都有

$$a\leqslant\bar{a}.$$

(2) 命 $\angle PQR=A$，$\angle\overline{P}\overline{Q}\overline{R}=\overline{A}$，则曲面 M 和 $\overline{M}$ 的余弦定律分别为

$k=0$， $a^2\leqslant b^2+c^2-2bc\cos A$，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\overline{A}$

$k>0$， $\cos(\sqrt{k}a)\geqslant\cos(\sqrt{k}b)\cos(\sqrt{k}c)+\sin(\sqrt{k}b)\sin(\sqrt{k}c)\cos A$，

$\cos(\sqrt{k}a)=\cos(\sqrt{k}b)\cos(\sqrt{k}c)+\sin(\sqrt{k}b)\sin(\sqrt{k}c)\cos\overline{A}$，

$k<0,\quad \cosh(\sqrt{-k}a)\leqslant\cosh(\sqrt{-k}b)\cosh(\sqrt{-k}c)-$
$$\sinh(\sqrt{-k}b)\sinh(\sqrt{-k}c)\cos A,$$
$$\cosh(\sqrt{-k}a)=\cosh(\sqrt{-k}b)\cosh(\sqrt{-k}c)-\sinh(\sqrt{-k}b)\sinh(\sqrt{-k}c)\cos\bar{A}.$$

因此，不论是哪一种情形，都有

$$\cos A\leqslant\cos\bar{A},$$

所以 $A\geqslant\bar{A}$. 证毕.

对于高斯曲率 $K\leqslant$ 常数 k 的完备曲面，有类似的余弦定律和 Toponogov 定理. 留给读者自己来表述，并加以证明.

附记：在这一节中，所有的结果的证明，都有一个前提，就是：在曲面上可以建立极坐标系，尽管曲面是完备的，但是高斯曲率大于零时，一般来说，不可能在曲面上整体地建立极坐标系，因此我们的结果还是局部的. 要大范围地证明 Toponogov 定理，必须先把测地三角形剖分得小一些，先局部地证明，然后再把局部的结果拼接成整体的（参阅：I. Chavel: Riemannian geometry, 1993, Cambridge Univ. Press. p. 331）.

习　题

1. 完整地证明：$k<0$ 时的完备曲面的余弦定律(3).

2. 用证明完备曲面的余弦定律的方法，去证明常高斯曲率曲面的余弦定律.

（提示：把定理证明中比较函数 $\bar{f}(s)$ 所满足的微分方程直接求解.）

3. 如果完备曲率 M 的高斯曲率 $K\leqslant$ 常数 k，假定测地三角形在可建立极坐标系的范围内，试叙述相应的余弦定律和 Toponogov 定理，并加以证明.

名 词 索 引

B